Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 6** **25.05.2016**

Aufgabe 24 *Potentialtopf*

Eine Punktmasse m befindet sich im Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > a \\ -V_0, & r \leq a\,, \end{cases} \tag{1}$$

wobei V_0 und a positive Konstanten sind und (r, θ) die Polarkoordinaten darstellen.

a) Beschreiben Sie die Bahnkurven in Abhängigkeit der Anfangsenergie E und des Drehimpulses l. *(1 Punkt)*

b) Nehmen Sie nun an, dass die Masse sich von links mit einem Stoßparameter $s < a$ nähert. Zeigen Sie, dass der Minimalabstand der Bahnkurve zum Mittelpunkt des Potentials

$$r_{\min} = \frac{l}{\sqrt{2m(E+V_0)}}$$

beträgt. *(1 Punkt)*
Hinweis: Der Stoßparameter s ist der senkrechte Abstand zwischen der anfänglichen Bahn und dem Potentialzentrum. Drücken Sie l durch s und E aus.

c) Geben Sie die Anfangsbedingungen für θ und r an. Zeigen Sie, dass die Bahnkurve für $r < a$ vor dem Erreichen des Minimalabstandes durch

$$\theta(r) = \pi + \arcsin\left(\frac{s}{a}\sqrt{\frac{E}{E+V_0}}\right) - \arcsin\left(\frac{s}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{s}{r}\sqrt{\frac{E}{E+V_0}}\right) \tag{2}$$

gegeben ist. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie den Winkel um den die Punktmasse vom Potential gestreut wird. *(1 Punkt)*
Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie der Bahnkurve um den Punkt an dem der Abstand zum Zentrum minimal ist.

e) Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\theta) = \frac{s}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$$

durch

$$\sigma(\theta) = \frac{n^2a^2}{4\cos\frac{\theta}{2}} \frac{\left(n\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - 2n - \cos\frac{\theta}{2} + n^2\right)^2} \tag{3}$$

gegeben ist, wobei

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}} \tag{4}$$

gilt. *(2 Punkte)*
Hinweis: Es ist hilfreich $s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ durch eine Ableitung von s^2 auszudrücken und Gl. (2) nach s^2 aufzulösen. Nutzen Sie trigonometrische Identitäten.

f) Wie lautet der totale Wirkungsquerschnitt? *(1 Punkt)*
Hinweis: Es gibt einen einfacheren Weg als das Integral über den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus Gl. (3) auszuführen.

g) Betrachten Sie eine Kugel mit dem Radius a und dem relativen Brechungsindex n aus Gl. (4). Ein Lichstrahl kommt von links mit einem Stoßparameter $s < a$. Der Strahl trifft unter dem Winkel θ_1 auf die Kugel und wird nach innen unter dem Winkel θ_2 gebrochen. Danach trifft der Strahl von innen unter dem Winkel θ_3 auf die Oberfäche und wird mit dem Winkel θ_4 nach außen gebrochen. Schreiben Sie θ_1, θ_2, θ_3 und θ_4 in Abhängigkeit von s, a und n. *(2 Punkte)*
Hinweis: Der Auftreffwinkel ist der Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der Flächennormalen am Auftreffpunkt. Der Brechungswinkel ist der Winkel zwischen dem gebrochenen Strahl und der Flächennormalen am Auftreffpunkt. Erinnern Sie sich an das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\sin\theta_1 = n \sin\theta_2 .$$

h) Zeigen Sie, dass die Brechung an dieser Kugel äquivalent zur Streuung einer Punktmasse am Potential aus Gl. (1) ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 25 *Lineare Algebra*

Gegeben seien die zwei $n \times n$ Matrizen A und B.

a) Beweisen Sie die zwei Relationen

$$(AB)^T = B^T A^T ,$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger .$$

(1 Punkt)
Hinweis: Hierbei stellt $M^\dagger$ die *transponierte und komplex konjugierte* Matrix zur Matrix M dar.

b) Nehmen Sie an A und B seien *ähnliche* Matrizen. Zeigen Sie die zwei Gleichheiten

$$\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, B ,$$

$$\det A = \det B .$$

(1 Punkt)
Hinweis: Zwei $n \times n$ Matrizen A und B sind *ähnlich* wenn eine invertierbare $n \times n$ Matrix P existiert, sodass

$$A = PBP^{-1} .$$