Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 8** **17.06.2016**

Aufgabe 27 *Dyadisches Produkt*

Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei von Null verschiedene Vektoren in $\mathbb{R}^3$ mit Komponenten A_x, A_y, A_z bzw. B_x, B_y, B_z. Das dyadische Produkt ist durch $G = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$ definiert, wobei die Komponenten der Matrix $G \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$G_{ij} = A_i B_j \text{ für } i, j \in \{x, y, z\} \tag{1}$$

gegeben sind.

a) Zeigen sie, dass G Rang 1 hat und ein Tensor zweiter Stufe ist. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Determinante $\det(G)$ und zeigen Sie, dass G mindestens einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_0 = 0$ hat. *(1 Punkt)*

c) Geben Sie die Anzahl und Form aller linear unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_0 = 0$ an. *(1 Punkt)*

d) Geben Sie alle Eigenwerte von G an. Was ist die Spur von G? *(1 Punkt)*

e) Berechnen sie den Eigenvektor für einen Eigenwert $\lambda \neq 0$. Unter welcher Bedingung exisitiert eine Basis in der G diagonal ist? *(1 Punkt)*

Aufgabe 28 *Drehimpulserhaltung*

Betrachten Sie N Teilchen mit Masse m_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ und Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ in einem Potential $V(\boldsymbol{r}_i)$. Es sei ϕ die Rotationskoordinate um die das System bzgl. des Vektors $\boldsymbol{n}$ rotiert wird.

a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \phi} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i \tag{2}$$

gilt. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die generalisierte Kraft Q_ϕ zu ϕ das Skalarprodukt zwischen dem Gesamtdrehmoment und $\boldsymbol{n}$ ist.
Hinweis: Für drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}. \tag{3}$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie weiter, dass der konjugierte Impuls p_ϕ zu ϕ das Skalarprodukt zwischen dem Gesamtdrehimpuls und $\boldsymbol{n}$ ist. Was folgern Sie, wenn ϕ eine zyklische Koordinate ist? *(1 Punkt)*

Aufgabe 29 *Der kräftefreie symmetrische Kreisel*

Betrachten Sie einen kräftefreien symmetrischen Kreisel, dessen Symmetrieachse die z-Achse ist.

a) Verwenden sie die Eulerschen Gleichungen um zu zeigen, dass der Gesamtdrehimpuls im Bezugssystem des Kreisels um die Symmetrieachse mit der Frequenz

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_z \tag{4}$$

rotiert. Dabei bezeichnen I_1, I_2 und I_3 die Hauptträgheitsmomente des Kreisels und ω_z ist die z-Komponente der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ im Bezugssystem des Kreisels. *(3 Punkte)*

b) Sei nun $\boldsymbol{L}$ parallel zur Vertikalen im ruhenden Bezugssystem (s. Abb. 1) und seien (θ, ϕ, ψ) die Eulerwinkel im Bezugssystems des Kreisels; θ gibt die Neigung der z-Achse gegen die Vertikale an, ϕ gibt den Azimut des Kreisels um die Vertikale an und ψ gibt den Drehwinkel um seine eigene Symmetrieachse an. Zeigen Sie, dass die z-Achse um die Vertikale rotiert und

$$\dot{\phi} = \frac{I_3\omega_z}{I_1 \cos\theta} \tag{5}$$

gilt.

Hinweis: Geben sie die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Koordinatensystem in Abhängigkeit der Eulerwinkel an. *(3 Punkte)*

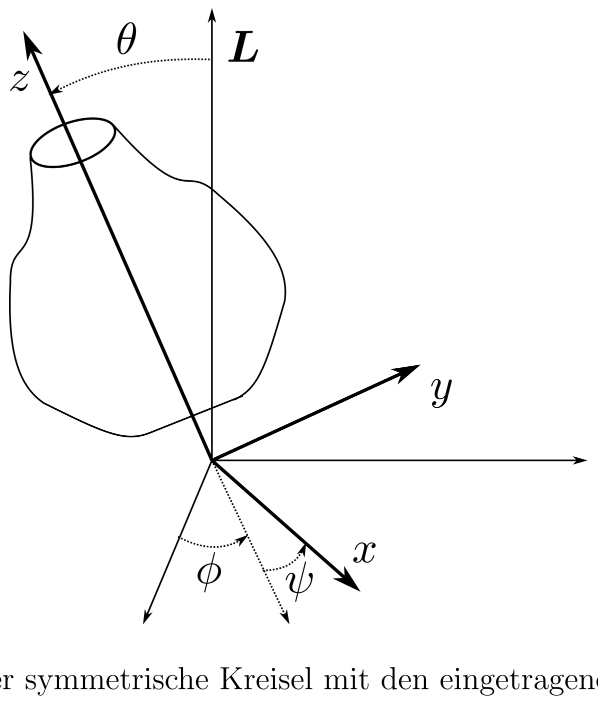

Abbildung 1: Der symmetrische Kreisel mit den eingetragenen Eulerwinkeln.