Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 9** **22.06.2016**

Aufgabe 30 *Der unsymmetrische Kreisel*

Betrachten Sie einen unsymmetrischen Kreisel mit den Hauptachsen x, y und z. Die Winkelfrequenz $\boldsymbol{\omega}$ hat die Komponenten $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ entlang dieser Hauptachsen. Für die Hauptträgheitsmomente gelte

$$I_3 > I_2 > I_1 \,.$$

a) Nutzen Sie die Energie- und Drehimpulserhaltung um

$$\omega_x^2 = \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)} \left[2EI_3 - L^2 - I_2(I_3 - I_2)\omega_y^2\right] \,,$$
$$\omega_z^2 = \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)} \left[L^2 - 2EI_1 - I_2(I_2 - I_1)\omega_y^2\right]$$

zu zeigen, wobei E die Gesamtenergie bezeichnet und L den Betrag des Drehimpulses $\boldsymbol{L}$ darstellt. *(2 Punkte)*

b) Nehmen Sie $L^2 > 2EI_2$ an und nutzen Sie die Euler-Gleichungen um

$$\dot{\omega}_y = \frac{\Gamma}{\alpha}\sqrt{1 - \alpha^2\omega_y^2}\sqrt{1 - k^2\alpha^2\omega_y^2}$$

zu zeigen, mit den Definitionen

$$\Gamma = \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}} \,,$$
$$\alpha = \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - L^2}} \,,$$
$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - L^2)}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)} \,.$$

(3 Punkte)

c) Führen Sie die neuen Variablen $\tau = \Gamma t$ und $s = \alpha\omega_y$ ein und nehmen Sie die Anfangsbedingung $\omega_y(t = 0) = 0$ an. Zeigen Sie, dass die bijektive Funktion $\tau(s)$ als ellipitsches Integral

$$\tau(s, k) = \int_0^s \frac{\mathrm{d}s'}{\sqrt{1 - s'^2}\sqrt{1 - k^2 s'^2}} \tag{1}$$

dargestellt werden kann. *(2 Punkte)*

d) Gleichung (1) ist ein unvollständiges elliptisches Integral erster Art. Seine Umkehrfunktion ist eine Jacobi elliptische Funktion, definiert als

$$s = \operatorname{sn} \tau \,, \tag{2}$$

welche ω_y in Abhängigkeit von t bestimmt. Die anderen beiden Jacobi elliptischen Funktionen sind

$$\operatorname{cn} \tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \tau}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tau} \,. \tag{3}$$

Nutzen Sie (2) und (3) um ω_x, ω_y und ω_z durch die drei Jacobi elliptischen Funktionen auszudrücken. *(2 Punkte)*

Kommentar: Die Jacobi elliptischen Funktionen $\operatorname{sn} \tau$, $\operatorname{cn} \tau$ und $\operatorname{dn} \tau$ sind periodisch mit der Periode $4K$, wobei

$$K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} \,.$$

Daraus folgt, dass $\boldsymbol{\omega}$ die Periode

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)}} \tag{4}$$

besitzt und damit im rotierenden Bezugssystem des Kreisels nach jeder Zeit T seinen Anfangswert annimmt.

e) Betrachten Sie nun die Bewegung des Kreisels im *nicht rotierenden* Bezugssystem. Die Eulerwinkel (θ, ϕ, ψ) sind die Winkel zwischen den Hauptachsen des Kreisels und den Achsen des festen Koordinatensystems. Wählen Sie als z-Achse die Richtung des Drehimpulses $\boldsymbol{L}$. Drücken Sie θ und ψ durch die oben definierten Jacobi elliptische Funktionen aus. *(2 Punkte)*

f) Zeigen Sie, dass

$$\dot{\phi} = L \frac{I_1 \omega_x^2 + I_2 \omega_y^2}{I_1^2 \omega_x^2 + I_2^2 \omega_y^2} \tag{5}$$

gilt. *(2 Punkte)*

Kommentar: Die Funktion $\phi(t)$ ist die Lösung der Gleichung (5) und kann als $\phi(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)$ geschrieben werden. Hierbei ändert sich $\phi_1(t)$ um 2π in jeder Periode T (gegeben durch (4)). Die Funktion $\phi_2(t)$ ist durch

$$\phi_2(t) = 2\pi \frac{t}{T'}$$

gegeben, wobei T' ein Zeitintervall ist, das inkommensurabel ist mit T. Die Bewegung des Winkels ϕ ist aus zwei periodischen Bewegungen zusammengesetzt: eine mit der Periode T, die mit den Perioden von θ und ψ übereinstimmt, und eine weitere mit der Periode T'. Da T' mit T inkommensurable ist kehrt der Kreisel nie in seine Anfangsposition zurück.