Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 1** **21.04.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Gianelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 28.04.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 1 *Fourier-Transformation*

Die Fourier-Transformation $g(k)$ von der Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$g(k) = FT[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ixk} \tag{1}$$

und die Inverse Fourier-Transformation $h(x)$ von der Funktion $g(k)$ ist definiert als

$$h(x) = FT^{-1}[g(k)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ixk}. \tag{2}$$

Wenn x als Ortsvariable betrachtet wird, entspricht die Transformation FT einem Darstellungswechsel zwischen Orts- und Impulsraum.

a) Beweisen Sie, dass $h(x) = f(x)$ unter Benutzung der Identitäten (1) und (2).
Hinweis: Benutzen sie $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} = \delta(x)$. *(1 Punkt)*

b) Beweisen Sie den Satz von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |g(k)|^2 \ . \tag{3}$$

Dieser Satz zeigt, dass die Fourier-Transformierte einer Funktion dieselbe Norm besitzt wie die Funktion selbst. *(2 Punkte)*

c) Betrachten Sie das normierte Gaußsche Wellenpaket

$$g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} \ . \tag{4}$$

Berechnen Sie ihre Fourier-Transformierte $f(x)$. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie nun die Verteilung $|f(x)|^2$ im Ortsraum und $|g(k)|^2$ im Impulsraum, wobei $g(k)$ das normierte Gaußsche Wellenpaket aus Teilaufgabe (c) darstellt und $f(x)$ die Fourier-Transformierte von $g(k)$. Bestimmen Sie die Breite Δx bzw. Δk der beiden Verteilungen und berechnen Sie $\Delta x \cdot \Delta k$.
Hinweis: Die Breite Δx der Verteilung $|f(x)|^2$ ist wie folgt definiert: Ändert sich x von 0 auf $\pm\Delta x$, so verringert sich $|f(x)|^2$ auf den $\sqrt{e}$-ten Teil. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *Bohr-Sommerfeld-Quantisierung*

In Rahmen der alten Quantentheorie wurden Theorien entwickelt zur Erläuterung von experimentellen Resultaten, die nicht mit Hilfe der klassischen Mechanik erklärt werden konnten. Dabei wurden die Postulate der klassischen Mechanik mit neuen Hypothesen kombiniert. Ein Beispiel dafür ist die Bohr-Sommerfeld Hypothese, in der angenommen wird, dass das System den Postulaten der klassischen Mechanik unterliegt, jedoch nur Trajektorien erlaubt sind, welche die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung

$$\oint_{H(q,p)=E} p(q)dq = 2\pi n\hbar \tag{5}$$

erfüllen. Dabei ist q eine generalisierte Koordinate des Systems und p der dazu kanonisch konjugierte Impuls. Des Weiteren entspricht n einer ganzen Zahl und das Integral wird über eine Periode der Bewegung des Teilchens bei einer konstanten Energie ausgeführt. In dieser Aufgabe soll die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung (5) auf einige einfache, klassische Systeme angewandt werden. Wie sich herausstellte, reicht die Bohr-Sommerfeld Hypothese nicht aus, um Phänomene der Quantenmechanik ausreichend zu beschreiben, so dass die Postulate der heutigen Quantenmechanik aufgestellt werden mussten. Dennoch sind diese Aufgaben gute Rechenübungen.

a) Ein kräftefreies Teilchen der Masse m bewegt sich in einer eindimensionalen Box des Volumens L und wird an den Wänden vollständig elastisch reflektiert. Bestimmen Sie die Energie E_n des Systems unter Verwendung der Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie für ein Teilchen mit Masse m im Potential $V(x) = a|x|$, wobei $a > 0$, die Energie E_n des Systems in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie für ein Teilchen mit der Masse m im homogenen Gravitationsfeld die Energie E_n des Systems in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. *(2 Punkte)*

d) Ein Teilchen mit der Masse m befindet sich in einem harmonischen Potential der Form $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, wobei $k > 0$. Berechnen Sie auch hier die Energie E_n des Systems in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. *(2 Punkte)*

e) Die Erde bewegt sich näherungsweise auf einer stationären Kreisbahn um die Sonne. Geben Sie die Energie des Systems E_n an und berechnen Sie näherungsweise die Quantenzahl der Erde. *(2 Punkte)*