Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 10** **23.06.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 30.06.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 28 *Radialimpuls*

Die klassische Definition des Radialimpulses

$$p_r = \frac{1}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})$$

mit $r = |\mathbf{r}|$ und $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ muss in der Quantenmechanik wegen der Nichtvertauschbarkeit von $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$ symmetrisiert werden:

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}\right) \ .$$

a) Zeigen Sie, dass der Radialimpuls $\hat{p}_r$ in Ortsdarstellung und in Kugelkoordinaten die Form

$$\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$$

annimmt. Verwenden sie dazu den Gradienten ∇ in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} \ .$$

(2 Punkte)

b) Welche Bedingung müssen die Wellenfunktionen erfüllen, so dass der Operator $\hat{p}_r$ wie ein hermitescher Operator auf die Wellenfunktionen wirkt? *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen des Radialimpulsoperators $\hat{p}_r$. *(2 Punkte)*

d) Handelt es sich beim Radialimpuls um eine Observable? Begründen Sie ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Aufgabe 29 *Drehimpulsoperator: Teil 2*

Der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ wurde bereits in der Aufgabe 21 definiert. Wir definieren nun die sogenannten Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{L}}^2$ mit den Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{L}_i$, wobei $i = x, y, z$, kommutiert. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right]$, $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_+\right]$, $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_-\right]$, $\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_-\right]$ und $\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_+\right]$ *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie die Relationen $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 30 *Kugelflächenfunktionen*

In kugelsymmetrischen Systemen können die Energieeigenzustände in der Produktform $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ ausgedrückt werden. Dabei stellen die Funktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$ die sogenannten Kugelflächenfunktionen dar. Die Kugelflächenfunktionen sind die Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators zum Quadrat:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta,\phi)$$

und die Eigenfunktionen der z-Komponente des Drehimpulsoperators:

$$\hat{\mathbf{L}}_z Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\phi)$$

in Ortsdarstellung, wobei l und m ganzzahlig sind mit $0 \leq m \leq l$. Definiert sind die Kugelflächenfunktionen über

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} \ ,$$

wobei $P_l^m(x)$ das sogenannte zugeordnete Legendrepolynom darstellt. Die zugeordneten Legendrepolynome $P_l^m(x)$ sind über

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

definiert.

a) Bestimmen Sie die Kugelflächenfunktionen $Y_0^0(\theta,\phi)$, $Y_1^0(\theta,\phi)$ und $Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi)$. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{1}{2}\left(Y_1^{-1} - Y_1^1\right) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$\frac{i}{2}\left(Y_1^{-1} + Y_1^1\right) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)\sin(\phi) \ .$$

(1 Punkt)

c) Zeigen sie unter Benutzung von $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$ die Relation

$$Y_l^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m \left(Y_l^m(\theta,\phi)\right)^*$$

für die Kugelflächenfunktionen. *(2 Punkte)*

d) Die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Zeigen Sie die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen

$$\int \left(Y_l^m(\theta,\phi)\right)^* Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) d\Omega = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \ ,$$

wobei das Integral über den gesamten Raumwinkel verläuft. Sie sollen dabei die Relation

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}$$

für die zugeordneten Legendrepolynome verwenden. *(2 Punkte)*

Aufgabe 31 *Drehimpuls einer Wellenfunktion*

Betrachten Sie ein spinloses Teilchen, welches durch die Wellenfunktion

$$\psi(x, y, z) = K\,(x + y + 2z)\,e^{-\alpha r} \tag{1}$$

beschrieben wird, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hierbei sind K und α Konstanten. Die Konstante K wird durch die Normierung der Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ bestimmt.

a) Formulieren Sie die Wellenfunktion in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). Separieren Sie den Radialanteil und den Winkelanteil $\psi(r, \theta, \psi) = R(r)\Phi(\theta, \phi)$ und normieren Sie den Winkelanteil $\Phi(\theta, \phi)$. Stellen Sie dann den Winkelanteil als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen dar.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 30 a) und b). *(2 Punkte)*

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung der z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z$ den Wert $\hbar$? *(2 Punkte)*

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung des Drehimpulses $\hat{\mathbf{L}}^2$ den Wert $2\hbar^2$? *(1 Punkt)*