Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 11** **30.06.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 07.07.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 32 *Laguerrepolynome*

In kugelsymmetrischen Systemen können die Energieeigenzustände durch die Produktform $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$ ausgedrückt werden. Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie bereits den Winkelteil $Y(\theta, \phi)$ der Wellenfunktionen, die Kugelflächenfunktionen, untersucht. In dieser Aufgabe sollen Sie nun den Radialanteil $R(r)$ untersuchen. Der Radialanteil wird im wesentlichen bestimmt durch die sogenannten zugeordneten Laguerrepolynome $L_j^k(x)$. Diese zugeordneten Laguerrepolynome können mit Hilfe der Laguerrepolynome berechnet werden

$$L_j^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{k+j}(x) \ , \tag{1}$$

wobei $k, j \in \mathbb{N}_0$. Die Laguerrepolynome $L_{j+k}(x)$ können aus der Rodrigues-Formel (für Laguerrepolynome)

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right) \ , \tag{2}$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$, entwickelt werden.

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $L_n(x)$, gegeben durch Gl. (2), die Laguerregleichung

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0 \tag{3}$$

erfüllen.
Hinweis: Durch die Ableitung von $g_n = e^{-x} x^n$ kann gezeigt werden, dass

$$x \frac{dg_n}{dx} = (n - x) g_n \tag{4}$$

gilt. Leiten Sie Gleichung (4) $n + 1$ mal ab und seien Sie dabei vorsichtig bei der Verwendung der Produktregel. Mit der Substitution $L_n = e^x \frac{d^n g_n}{dx^n}$ in Gleichung (3) können die Ausdrücke umgeordnet werden, um die Äquivalenz der beiden Gleichungen zu zeigen. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die zugeordneten Laguerrepolynome die Laguerregleichung

$$x \frac{d^2 L_j^k(x)}{dx^2} + (1 - x + k) \frac{dL_j^k(x)}{dx} + jL_j^k(x) = 0 \tag{5}$$

erfüllen. Auch für $j \in \mathbb{R}$ können die zugeordneten Laguerrepolynome $L_k^j(x)$ definiert werden, die ebenfalls die Laguerregleichung (5) erfüllen.
Hinweis: Betrachten Sie Gl. (3) mit $n \to k + j$ und leiten Sie k-mal ab. *(2 Punkte)*

Aufgabe 33 *Dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator: Teil 1*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V(r)$.

a) Zeigen Sie mit einem geeigneten Separationsansatz und Aufgabe 30, dass die Schrödingergleichung für den Radialanteil

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{r^2}{R(r)}\Delta_r R(r) + r^2\left(E - V(r)\right) - \frac{\hbar^2}{2m}l(l+1) = 0 \tag{6}$$

lautet, wobei $l \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$ den Radialanteil des Laplaceoperators darstellt.
Hinweis: Der Drehimpulsoperator zum Quadrat nimmt in der Ortsdarstellung die Form

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

an. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die Gl. (6) gleichbedeutend ist mit

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}u(r) + (E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}l(l+1))u(r) = 0\ , \tag{7}$$

wobei $u(r) = rR(r)$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass für ein Teilchen im harmonischen Potential $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ sich die Gl. (7) in die dimensionslose Radialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \rho^2 + \epsilon\right]u(\rho) = 0$$

bringen lässt. *(1 Punkt)*

d) Machen Sie nun den Ansatz $u_{l,k}(\rho) = \rho^{l+1}\exp(-\rho^2/2)f_{k,l}(\rho)$ für die Wellenfunktion eines Teilchens im Potential $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ und zeigen Sie, dass dieser auf die folgende Differentialgleichung für $g_{kl}(x) = f_{kl}(\sqrt{x})$ führt:

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + \left(\left(l + \frac{1}{2}\right) + 1 - x\right)\frac{d}{dx} + k\right]g_{kl}(x) = 0\ , \tag{8}$$

wobei $k = (\epsilon - 3 - 2l)/4$. Mit diesem Ansatz wurden die Quantenzahlen l und k eingeführt, die den Radialzustand eindeutig festlegen.
Welche Funktionen sind die Lösungen der Differentialgl. (8)? *(3 Punkte)*

e) Geben Sie die Eigenfunktionen eines Teilchens im Potential $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ an, wobei Sie die Normierungskonstante nicht berechnen müssen. *(2 Punkte)*

Aufgabe 34 *Dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator: Teil 2*

Betrachten Sie auch in dieser Aufgabe ein Teilchen der Masse m im harmonischen Potential $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

a) Stellen Sie den Hamiltonoperator eines Teilchens in diesem Potential $V(r)$ in kartesischen Koordinaten dar. Bestimmen Sie mit dem Separationsansatz $\psi(\mathbf{r}) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$ die Eigenfunktionen und Eigenwerte des dreidimensionalen Oszillators.
Hinweis: Verwenden Sie dabei die Lösungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators, die bereits aus der Vorlesung bekannt sind. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie den Grad der Entartung der Eigenenergien des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators. *(2 Punkte)*