Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Bonus-Blatt 14** **21.07.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 28.07.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

Die hier erreichten Punkte zählen als Bonuspunkte für die Klausurzulassung.

Aufgabe 41 *Chemisches Potential eines idealen Gases*

Wie bereits gezeigt, ist die Entropie $S = S(E, V, N)$ eines idealen, monoatomaren Gases mit N Teilchen in einem Volumen V und mit Energie E durch den Ausdruck

$$S(E, V, N) = k_B N \left[\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{E}{N}\right) + \frac{5}{2} + \ln(C) \right]$$

gegeben, wobei C eine Konstante darstellt.

a) Berechnen Sie das chemische Potential $\mu(E, V, N)$ und zeigen Sie, dass es sich um eine intensive Größe handelt, also dass $\mu = \mu(E/N, V/N, 1)$ gilt. *(2 Punkte)*

b) Benutzen Sie die thermische sowie die kalorische Zustandsgleichung, um das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und des Druckes p zu schreiben. *(1 Punkt)*

Aufgabe 42 *Maxwell-Boltzmann Verteilung und kanonisches Ensemble*

Betrachten Sie ein klassisches System aus N Teilchen der Masse m, das sich im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T befindet. Wir wissen, dass die Gesamtenergie des Systems als Summe der kinetischen Energie $K(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ und der potentiellen Energie $U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ geschrieben werden kann. Die kinetische Energie ist eine quadratische Funktion der Impulse $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$, während die potentielle Energie eine Funktion der Positionen $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ ist. Für die Gesamtenergie gilt $E = K + U$.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ an, im kanonischen Ensemble einen bestimmten Mikrozustand $\{\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ vorzufinden. Die Normalisierungskonstante kann dabei vernachlässigt werden. Beachten Sie außerdem, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Orte und Impulse unabhängig voneinander sind. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1, \ldots, \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_N$ der Teilchen-Impulse an. Die korrekte Normalisierung kann erneut vernachlässigt werden. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen eine Geschwindigkeit im Intervall $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} + \mathrm{d}\boldsymbol{p}]$ besitzt, durch den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(p_x, p_y, p_z)\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z &= \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mk_BT}} \mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z \\
&= \frac{4\pi}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} p^2 \mathrm{d}p,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gegeben ist, wobei $p = |\boldsymbol{p}|$. Dies ist die sogenannte Maxwell-Boltzmann Verteilung. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie den Mittelwert

$$
\frac{<\boldsymbol{p}^2>}{2m} = \frac{<p_x^2 + p_y^2 + p_z^2>}{2m} \tag{2}
$$

und zeigen Sie, dass die durchschnittliche kinetische Energie des Systems durch

$$
<K>= \frac{3}{2} N k_B T \tag{3}
$$

gegeben ist. *(3 Punkte)*

e) Betrachten Sie nun das Gas der Atomsphäre im homogenen Gravitationsfeld der Erde:

$$
U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} m g z_i, \quad z_i \in [0, \infty]. \tag{4}
$$

Geben Sie analog zu den Punkten a) und b) die Wahrscheinlichkeitsverteilung $g(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_1, \ldots, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_N$ der Teilchenpositionen an. Erneut kann die korrekte Normalisierung vernachlässigt werden. *(1 Punkt)*

f) Berechnen Sie schließlich für ein einzelnes Teilchen die Wahrscheinlichkeit $g^{(1)}(z)\mathrm{d}z$ sich in einer Höhe zwischen z und $z + \mathrm{d}z$ zu befinden, diesmal unter Beachtung der korrekten Normalisierung. Dies ist die barometrische Höhenformel. *(2 Punkte)*