Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 2** **28.04.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 05.05.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 3 *Fourier-Transformation*

Betrachten Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} A & \text{für } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1a}$$

$$f_2(x) = Be^{-\frac{|x|}{b}}, \tag{1b}$$

wobei a und b positive Konstanten darstellen.

a) Bestimmen Sie $A > 0$ und $B > 0$, so dass die Funktionen aus Gl. (1) bezüglich der Norm

$$|f| = \sqrt{\langle f(x)|f(x)\rangle} \tag{2}$$

auf 1 normiert sind. Das Skalarprodukt $\langle f(x)|h(x)\rangle$ ist dabei definiert als

$$\langle f(x)|h(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)h(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $g_i(k)$ der Funktion $f_i(x)$ aus Gl.(1), wobei $i = 1, 2$. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Standardabweichung Δx_i und Δk_i der Funktionen $|f_i(x)|^2$ und $|g_i(k)|^2$, wobei $i = 1, 2$. Zeigen Sie des weiteren, dass die Ungleichung $\Delta x_i \cdot \Delta k_i \geq \frac{1}{2}$ für $i = 1, 2$ erfüllt ist.

Hinweis: Sie dürfen dabei

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(1 + c^2 \cdot y^2)^2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2c^3}, \text{ für } c > 0 \tag{4}$$

benutzen. *(3 Punkte)*

Aufgabe 4 *(Ir)relevanz der Quantenmechanik*

In Aufgabe 2 Teilaufgabe *d*) haben Sie bereits mit Hilfe der *Bohr-Sommerfeld Quantisierungsbedingung* die Energie eines harmonischen Oszillators quantisiert:

$$E_n = n\omega\hbar, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \hbar \approx 1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}, \tag{5}$$

wobei k die elastische Konstante darstellt und m die Masse des Teilchens. Berechnen Sie für jeden der folgenden Fälle explizit die Änderung der Energie, wenn die Quantenzahl n um 10^3 erhöht wird. Geben Sie die Ergebnisse in der physikalischen Einheit Joule an.

a) Die Frequenz des Oszillators beträgt $\omega = 1$ Hz. *(1 Punkt)*

b) Die elastische Konstante beträgt $k = 100$ N/m und die Masse nimmt den Wert $m = 1$ kg an. *(1 Punkt)*

c) Betrachten Sie nun den zweiten Fall *b)* und nehmen Sie an, dass die Masse mit einer maximalen Auslenkung von $l_{\text{max}} = 1$ cm oszilliert. Bestimmen Sie n für diesen Fall. Schätzen Sie die Änderung in der maximalen Auslenkung, wenn die Quantenzahl n um 10^3 erhöht wird. *(2 Punkte)*

Aufgabe 5 *Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf*

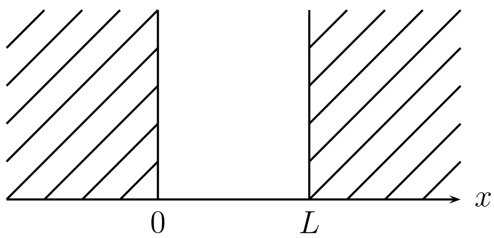
Ein Teilchen der Masse m ist zwischen zwei undurchdringlichen Wänden gefangen. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x), \tag{6}$$

dabei ist das Potential durch

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } \; x \leq 0, x \geq L \\ 0 & \text{für } \; 0 < x < L \end{cases}$$

gegeben mit $L > 0$.



a) Berechnen Sie die normierten Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ und die Eigenwerte E_n $(n = 1, 2, \dots)$ des Hamiltonoperators in Gl.(6) mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung. *(3 Punkte)*

Hinweis: Die Eigenfunktionen des Systems nehmen immer den Wert 0 an, wenn das Potential unendlich ist.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen symmetrisch oder antisymmetrisch im Bezug auf den Mittelpunkt der Box sind. Für welche n sind die Eigenfunktionen symmetrisch? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Anzahl der Nullstellen der Eigenfunktion $\psi_n(x)$ im Intervall $]0, L[$. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie die Relation

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \tag{7}$$

unter Benutzung der Definition (3). *(2 Punkte)*

e) Das Teilchen ist genau bei $x = L/2$ lokalisiert. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der Energie den Eigenwert E_n liefert? *(2 Punkte)*