

Übung zur Vorlesung

Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017

Blatt 3

05.05.2017

Dr. Schank

mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 12.05.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 6 *Hermitesche Operatoren*

Erfüllt ein linearer Operator \hat{A} die Relation

$$\langle u | \hat{A}u \rangle = \langle \hat{A}u | u \rangle, \quad (1)$$

so wird er hermitescher Operator genannt. Das Skalarprodukt ist dabei über

$$\langle u | \hat{A}u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x) A(x) u(x) dx \quad (2)$$

definiert und $u(x)$ stellt in Gl. (1) eine beliebige Funktion dar.

Zeigen Sie, dass die Relation (1) die Relation

$$\langle f | \hat{A}g \rangle = \langle \hat{A}f | g \rangle \quad (3)$$

impliziert, wobei $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen darstellen.

Hinweis: Wenden Sie die Funktionen (i) $u(x) = f(x) + g(x)$ und (ii) $u(x) = f(x) + ig(x)$ auf die Relation (1) an, wobei $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen darstellen. (3 Punkte)

Aufgabe 7 *Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf: Teil 2*

In Aufgabe 5 wurde ein Teilchen betrachtet, welches zwischen zwei undurchdringlichen Wänden gefangen ist. Im Folgenden werden die Ergebnisse und Notationen der Aufgabe 5 genutzt, um das System weiter zu untersuchen. Die normierten Eigenfunktionen eines Teilchens in dem Potential aus Aufgabe 5 können als

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

geschrieben werden, wobei x die Ortsvariable, n die Quantenzahl und L die Breite des Potentialtopfes angibt.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte ein Teilchen am Ort x im Potentialtopf anzutreffen. Zeichnen Sie für die ersten drei Quantenzahlen n diese Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion vom Ort x . (1 Punkt)

- b) Berechnen Sie explizit die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ mit Hilfe der Teilaufgabe a).
(2 Punkte)
- c) Berechnen Sie nun die Erwartungswerte $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$. Bestimmen Sie aus den Erwartungswerten aus Teilaufgabe b) und c) die Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p$, wobei Δx und Δp die Standardabweichungen der Wahrscheinlichkeitsdichten im Ort- und Impulsraum darstellen.
(2 Punkte)
- d) Berechnen Sie die zeitabhängigen Eigenfunktionen $\psi_n(x, t)$. (1 Punkt)
- e) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsstromdichte j für jede Quantenzahl n .
(2 Punkte)

Aufgabe 8 Ehrenfest Theorem

- a) Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem 3-dimensionalen Potential $V(\mathbf{r})$. Beweisen Sie die Relation

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = - \langle \nabla V(\mathbf{r}) |_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \rangle \quad (5)$$

zwischen dem Erwartungswert des Impulses des Teilchens und dem Erwartungswert der Ableitung des Potentials. Diese Relation wird auch das Ehrenfest Theorem für den Impuls genannt. In Gl. (5) ist $\hat{\mathbf{p}}$ der Impulsoperator und sein Erwartungswert im Ortsraum ist definiert über

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}_{op} \psi(\mathbf{r}, t) . \quad (6)$$

Der zweite Erwartungswert in Gl. (5) entspricht ebenfalls dem Erwartungswert im Ortsraum und lautet

$$\langle \nabla V(\mathbf{r}) |_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \rangle = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) (\nabla V(\mathbf{r})) \psi(\mathbf{r}, t) , \quad (7)$$

wobei $\psi(\mathbf{r}, t)$ die Wellenfunktion des Teilchens darstellt. (4 Punkte)

- b) Im Allgemeinen ist die Identität

$$\langle \nabla V(\mathbf{r}) |_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \rangle = \nabla V(\mathbf{r}) |_{\mathbf{r}=\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle} \quad (8)$$

nicht korrekt. Zeigen Sie, dass die Relation (8) für ein harmonisches Potential $V(x) = \lambda x^2$ erfüllt ist. Welche Größe muss verschwinden, so dass die Relation (8) für das Potential $V(x) = \lambda x^3$ erfüllt ist? Die Konstante λ nimmt dabei nicht den Wert Null an. (2 Punkte)