Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 4** **12.05.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 19.05.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 9 *Eindimensionale Quantensysteme*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential $V(x)$. Der Hamiltonoperator dieses eindimensionalen Systems lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \tag{1}$$

a) Ein Zustand im Ortsraum $\psi(x)$ bezeichnet man als gebunden, wenn dieser normierbar ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass in dem hier betrachteten eindimensionalen System die gebundenen Zustände nicht entartet sind.

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass zwei verschiedene Lösungen der stationären Schrödingergleichung im Ortsraum existieren mit der gleichen Energie. Zeigen Sie dann, dass die beiden Lösungen proportional zueinander sind. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die gebundenen Lösungen im Ortsraum der stationären Schrödingergleichung in dem hier betrachteten eindimensionalen System reell gewählt werden können.
Hinweis: Die stationäre Schrödingergleichung ist eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit reellen Parametern. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie die Orthogonalität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

zweier nicht identischer reeller Eigenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ für ein diskretes Energiespektrum. *(2 Punkte)*

Aufgabe 10 *Deltapotential*

Betrachten Sie ein Teilchen mit der Masse m in einem Deltapotential $V(x) = V_0\delta(x)$, wobei $V_0 < 0$.

a) Berechnen Sie die gebundenen normierten Eigenfunktionen des Teilchens, d.h. die normierten Eigenfunktionen für negative Energien E. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Bedingung für die Ableitung der Eigenfunktionen bei $x = 0$, dass nur ein gebundener Zustand erlaubt ist mit der Eigenenergie $E = -\frac{mV_0^2}{\hbar^2 2}$.
Hinweis: Die Ableitung der Eigenfunktion für $x < 0$ entspricht nicht der Ableitung der Eigenfunktion für $x > 0$ bei $x = 0$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 11 *Endlicher Potentialtopf*

Lösen Sie die Schrödingergleichung für ein Teilchen mit der Masse m in einem endlichen Potentialtopf

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > a \\ -V_0 & \text{für } |x| < a \end{cases},$$

wobei $V_0 > 0$. Dabei gehen Sie wie folgt vor.

a) Berechnen Sie die gebundenen Eigenfunktionen ($0 > E > -V_0$) mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung ohne explizit die Koeffizienten, die über die Randbedingungen im System bestimmt werden, zu berechnen. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Stetigkeit der Eigenfunktionen und der Ableitung der Eigenfunktionen an den Sprungstellen des Potentials vier Gleichungen für die in den Eigenfunktionen auftauchenden Koeffizienten. *(2 Punkte)*

c) Leiten Sie mit Hilfe dieser vier Gleichungen die implizite Gleichung

$$\rho^2 - k^2 + 2\rho k \cot(2ka) = 0 \tag{4}$$

für die entsprechenden Eigenenergien her, wobei $\rho^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E$ und $k^2 = (E + V_0)\frac{2m}{\hbar^2}$ mit E der Eigenenergie des Teilchens. *(3 Punkte)*

d) Diskutieren Sie die Lösungen dieser Gleichung und damit die möglichen Eigenenergien grafisch. Sie dürfen dabei auch gerne einen Computer benutzen. *(2 Punkte)*