Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 6** **26.05.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 02.06.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 15 *Kommutatorrelationen*

Mit

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

definiert man den Kommutator der beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Kommutators

a) $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = -\left[\hat{B}, \hat{A}\right]$ *(1 Punkt)*

b) $\left[\hat{A}, \left(\hat{B} + \hat{C}\right)\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]$ *(1 Punkt)*

c) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right]$ *(1 Punkt)*

d) $\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B}, \left[\hat{C}, \hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 16 *Operatorfunktion*

In dieser Aufgabe sollen Sie Relationen zeigen, die beim Umgang mit Operatorfunktionen nützlich sind. Wir betrachten dabei eine Funktion f einer Variablen z, die in einem bestimmten Bereich in eine Potenzreihe von z entwickelt werden kann:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \ .$$

Nach Definition ist die zugehörige, vom Operator $\hat{A}$ abhängende Operatorfunktion $f(\hat{A})$ durch die Reihe

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{A}^n$$

mit den selben Koeffizienten f_n gegeben.

a) Zeigen Sie die Relation

$$\hat{A}^{-1}\hat{B}^2\hat{A} = \left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right)^2 \ .$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie die Relation

$$\hat{A}^{-1}\hat{B}^n\hat{A} = \left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right)^n$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie die Relation

$$\hat{A}^{-1}f(\hat{B})\hat{A} = f\left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right) \ .$$

(1 Punkt)

d) Zeigen Sie die Kommutatorrelation

$$\left[f(\hat{A}), \hat{B}\right] = f'(x)|_{x=\hat{A}} \ ,$$

wobei $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \mathbb{1}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\hat{A}^{n-1}$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 17 *Operatorfunktion: Exponentialfunktion*

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die Operatorfunktion $e^{\hat{A}}$ der Exponentialfunktion.

a) Der Operator $\hat{A}$ sei nun ein linearer Operator und $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen sie das Potenzgesetz

$$e^{a\hat{A}}e^{b\hat{A}} = e^{(a+b)\hat{A}}$$

für die hier betrachtete Operatorfunktion. *(2 Punkte)*

b) Ein Operator $\hat{U}$ heißt nach Definition ein unitärer Operator, wenn sein Inverses $\hat{U}^{-1}$ gleich seinem Adjungierten $\hat{U}^\dagger$ ist:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1} \ .$$

Zeigen Sie nun, dass der Operator $\hat{T} = e^{ia\hat{A}}$ unitär ist, wobei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator ist und $a \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 18 *Ableitung von Operatoren und Operatorfunktionen*

Sei $\hat{A}(c)$ ein Operator, der von einer beliebigen Variablen c abhängt. Wie bei gewöhnlichen Funktionen definiert man die Ableitung von $\hat{A}(c)$ durch den Grenzwert (falls er existiert)

$$\frac{d\hat{A}(c)}{dc} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\hat{A}(c+\epsilon) - \hat{A}(c)}{\epsilon} \ .$$

In dieser Aufgabe sollen einige Relationen gezeigt werden, die bei Ableitungen von Operatorfunktionen nützlich sind.

a) Zeigen Sie die Produktregel
$$\frac{d(\hat{A}\hat{B})}{dc} = \hat{A}\frac{d\hat{B}}{dc} + \frac{d\hat{A}}{dc}\hat{B}$$
für Operatoren, wobei die beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kontinuierlich von der Variablen c abhängen. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass
$$\frac{d\hat{A}^{-1}(c)}{dc} = -\hat{A}^{-1}(c)\frac{d\hat{A}(c)}{dc}\hat{A}^{-1}(c)$$
gilt. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass
$$\frac{de^{a\hat{A}}}{da} = \hat{A}e^{a\hat{A}}$$
gilt, wenn der Operator $\hat{A}$ unabhängig von der Variablen a ist. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie, dass
$$\frac{d}{da}\left(e^{a\hat{A}}\hat{B}e^{-a\hat{A}}\right) = e^{a\hat{A}}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]e^{-a\hat{A}}$$
gilt, wenn die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ unabhängig von der Variablen a sind. *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie die Relation
$$\frac{d}{da}\left(e^{a\hat{A}}e^{a\hat{B}}\right) = e^{a\hat{A}}\left(\hat{A} + \hat{B}\right)e^{a\hat{B}} \ ,$$
wobei die Operatoren unabhängig von der Variablen a sind. *(1 Punkt)*