Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 7** **02.06.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 09.06.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 19 *Operatoren*

In der Vorlesung wurde bereits der inverse, der adjungierte, der transponierte und der konjugierte Operator zu einem Operator definiert. Im Folgenden sollen Sie Relation beweisen, die beim Umgang mit diesen Operatoren hilfreich sind.

a) Zeigen Sie die Relation $(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$, wobei $\hat{A}^{-1}$ ($\hat{B}^{-1}$) der inverse Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) ist. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{A}^*\hat{B}^*$, wobei $\hat{A}^*$ ($\hat{B}^*$) den komplex konjugierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^T = \hat{B}^T\hat{A}^T$, wobei $\hat{A}^T$ ($\hat{B}^T$) den transponierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$, wobei $\hat{A}^\dagger$ ($\hat{B}^\dagger$) den adjungierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 20 *Ort-und Impulsoperator*

Im Ortsraum besteht die Wirkung des Ortsoperators auf eine quadratisch integrierbare Funktion $\psi(\mathbf{r})$ in einer Multiplikation mit dem Vektor $\mathbf{r}$. Die Wirkung des Impulsoperators ist durch Anwendung des Gradientens auf diese Funktion gegeben. Damit sind, wie bereits in der Vorlesung definiert, die Operatoren im Ortsraum durch $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{r}$ und $\mathbf{p}_{op} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}$ gegeben. Bestimmen Sie

a) den transponierten Operator $\mathbf{r}_{op}^T$ zum Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ im Ortsraum. *(1 Punkt)*

b) den transponierten Operator $\mathbf{p}_{op}^T$ zum Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. *(2 Punkte)*

c) den komplex konjugierten Operator sowohl für den Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ als auch für den Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. *(1 Punkt)*

d) den adjungierten Operator sowohl für den Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ als auch für den Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. Sind die beiden Operatoren hermitesch? *(1 Punkt)*

Aufgabe 21 *Drehimpulsoperator*

Der Drehimpulsoperator ist definiert als das Kreuzprodukt zwischen dem Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ und dem Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}$: $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$.

a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator hermitesch ist, d.h. $\hat{\mathbf{L}}^\dagger = \hat{\mathbf{L}}$.
Hinweis: Benutzen Sie dabei den Levi-Civita Tensor. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_x, \hat{x}\right]$, $\left[\hat{L}_x, \hat{y}\right]$ und $\left[\hat{L}_x, \hat{z}\right]$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_x, \hat{p}_x\right]$, $\left[\hat{L}_x, \hat{p}_y\right]$ und $\left[\hat{L}_x, \hat{p}_z\right]$. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]$. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{\mathbf{L}}_i, \hat{\mathbf{r}}_j\right]$, wobei $i, j = x, y, z$. *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{\mathbf{L}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j\right]$, wobei $i, j = x, y, z$. *(2 Punkte)*