Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 9** **16.06.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 23.06.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 25 *Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators*

Die Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators werden im Wesentlichen durch die sogenannten Hermitepolynome

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

bestimmt. Im Folgenden sollen Sie einige dieser Eigenfunktionen bestimmen und Eigenschaften der Hermitepolynome zeigen.

a) Berechnen Sie ausgehend von der Differentialgleichung $\hat{a}|0\rangle = 0$ explizit den normierten Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators im Ortsraum. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die ersten beiden angeregten Zustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators durch sukzessive Anwendung des Aufsteigeoperators $\hat{a}^\dagger$ im Ortsraum. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z-\lambda) = e^{-\lambda^2+2\lambda z}$ die erzeugende Funktion der Hermitepolynome ist, d.h.

$$e^{-\lambda^2+2\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z) \ . \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(z-\lambda)$. *(2 Punkte)*

d) Leiten Sie die Rekursionsbeziehung

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, ... \tag{2}$$

her.
Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach λ. *(2 Punkte)*

e) Zeigen Sie die Rekursionsbeziehung

$$H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, ... \tag{3}$$

Leiten Sie danach die folgende Differentialgleichung her:

$$H_n''(z) - 2zH_n'(z) + 2nH_n(z) = 0, \quad n = 1, 2, .. \tag{4}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach z. *(2 Punkte)*

f) Beweisen Sie durch Induktion, dass $H_n(z)$ ein Polynom n-ter Ordnung ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 26 *Dichteoperator*

Um den Erwartungswert einer Observable $\hat{X}$ mit Hilfe des im Folgenden definierten Dichteoperators $\hat{\rho}$ zu berechnen, benötigen Sie die Spur (Sp) eines Operators $\hat{Y}$. Die Spur eines Operators $\hat{Y}$ ist definiert als

$$Sp(\hat{Y}) = \sum_n \langle n|\hat{Y}|n\rangle \ , \tag{5}$$

wobei $\{|n\rangle\}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem ist.

a) Ein System sei im Zustand $|\psi\rangle$, mit $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Der Erwartungswert einer Observablen $\hat{X}$ hat den Mittelwert $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \left\langle \psi|\hat{X}|\psi \right\rangle$. Man definiert den **Dichteoperator eines reinen Zustandes** als

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \ . \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass

1. $\left\langle \hat{X} \right\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{X})$ *(1 Punkt)*
2. $Sp(\hat{\rho}) = 1, \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ *(1 Punkt)*
3. $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ *(1 Punkt)*

b) **Im Allgemeinen ist der Dichteoperator** definiert als

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \ , \tag{7}$$

wobei $|\psi_i\rangle$ einen normierten Zustand darstellt und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $\sum_i p_i = 1$. Daher ist der Dichteoperator aus a) nur ein Spezialfall mit einem p_i gleich eins und den restlichen p_i gleich Null. Auch im allgemeinen Fall ist der Erwartungswert einer Observablen $\hat{X}$ durch $\left\langle \hat{X} \right\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{X})$ gegeben. Zeigen Sie für den allgemeinen Dichteoperator, dass

1. $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{X}|\psi_i\rangle$ *(1 Punkt)*
2. $Sp(\hat{\rho}) = 1, \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ *(1 Punkt)*
3. $Sp(\hat{\rho}^2) < 1$, falls $p_i \neq 0$ für mehr als ein i. *(1 Punkt)*

Aufgabe 27 *Schrödinger- und Heisenberg-Bild*

a) Bestimmen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle\psi(t)|\hat{a}|\psi(t)\rangle$ des Absteigeoperators und den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle\psi(t)|\hat{a}^\dagger|\psi(t)\rangle$ des Aufsteigeoperators im Schrödinger-Bild, wobei $|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}|n\rangle$ mit den Eigenenergien E_n und den Eigenzuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators und $C_n \in \mathbb{C}$. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die zeitabhängigen Operatoren $\hat{a}_H$ und $\hat{a}_H^\dagger$ im Heisenberg-Bild. *(1 Punkt)*

c) Verifizieren Sie mit den hier erhaltenen Ergebnissen das Ehrenfest-Theorem für den Ortsoperator $\hat{x}$ und den Impulsoperator $\hat{p}$:

$$m\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = -\left\langle \frac{d}{dx}V(x)\bigg|_{x=\hat{x}} \right\rangle \tag{9}$$

Dabei wird der Erwartungswert bezüglich des Zustandes $|\psi(t)\rangle$ genommen. Das Potential $V(x)$ stellt das Potential des harmonischen Oszillators dar. *(2 Punkte)*