Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Tutorium-Blatt** **08.08.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Die Lösung des Blattes wird im Tutorium am 11.08.17 um 9:00 Uhr im Seminarraum 1 in Gebäude E2.5 präsentiert. Falls Fragen existieren bitten wir Sie uns diese vor dem Tutorium per Email zu senden.

Aufgabe 1 *Ultrarelativistisches Gas*

Wir wollen mit Hilfe des kanonischen Ensembles die thermodynamischen Eigenschaften eines ultrarelativistischen klassischen Gases berechnen. Ein solches Gas besteht aus masselosen Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (z.B. Photonen). Nach der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung gilt

$$\epsilon = \left(\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4\right)^{1/2} \to \epsilon = |\mathbf{p}|c \quad \text{für} \quad m = 0.$$

Das ultrarelativistische Gas wird auch oft als leicht zu berechnendes Modell für Teilchen mit Masse $m \neq 0$ benutzt, wenn nur die zur Verfügung stehende Energie pro Teilchen $\epsilon \ll mc^2$, oder gleichbedeutend, wenn die Temperatur sehr hoch ist, so dass die Ruheenergie mc^2 gegen die kinetische Energie vernachlässigt werden kann. Die Hamilton-Funktion H für das ultrarelativistische Gas lautet:

$$H = \sum_{i=1}^{N} c\left(p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2\right)^{1/2} \; ,$$

wobei N die Anzahl der ultrarelativistischen Teilchen angibt.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z des ultrarelativistischen Gases. Sie sollten das Ergebnis

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N$$

mit der thermischen Wellenlänge $\lambda = hc/k_BT(8\pi)^{1/3}$ des ultrarelativistischen Gases erhalten.

Hinweis: Sie können dabei das folgende Integral benutzen:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt\ t^x e^{-t} = x! \quad \text{falls} \quad x \in \mathbb{N}_0 \; .$$

b) Berechnen Sie aus der Zustandssumme Z die freie Energie $F(T,V,N)$ des Systems, wobei wir annehmen, dass $N \gg 1$. Sie sollten das Ergebnis

$$F(T,V,N) = -Nk_BT\left(1 + \ln\left\{\frac{8\pi V}{N}\left(\frac{k_BT}{hc}\right)^3\right\}\right)$$

erhalten.

c) Aus der freien Energie $F(T,V,N)$ können alle thermodynamischen Eigenschaften berechnet werden. Berechnen Sie den Druck p und damit die Zustandsgleichung des ultrarelativistischen Gases. Berechnen Sie zudem die Entropie S und das chemische Potential μ des Systems.

d) Berechnen Sie die Energie E des Systems.

Aufgabe 2 *Eigenzustände eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators*

Betrachten Sie den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator (1) äquivalent zu

$$\hat{H} = \left(\hat{n}_x + \hat{n}_y + \hat{\mathbb{1}}\right)\hbar\omega,\ \hat{n}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x,\ \hat{n}_y = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$$

ist.

b) Drücken Sie den Operator der z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ als Funktion von $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ aus. Sie sollten das Ergebnis

$$\hat{L}_z = i\hbar\left(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y\right)$$

erhalten. Beachten Sie, dass $\left[\hat{a}_x, \hat{a}_y^\dagger\right] = 0$ und $\left[\hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger\right] = 0$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ einen gemeinsamen Satz simultaner Eigenvektoren haben.

d) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \left(\hat{n}_d + \hat{n}_g + \hat{\mathbb{1}}\right)\hbar\omega$$

mit

$$\hat{n}_d = \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d,\ \hat{n}_g = \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g,\ \hat{a}_g = \left(\hat{a}_x - i\hat{a}_y\right)/\sqrt{2},\ \hat{a}_d = \left(\hat{a}_x + i\hat{a}_y\right)/\sqrt{2}$$

ausgedrückt werden kann. Schreiben Sie $\hat{L}_z$ in Bezug auf $\hat{n}_d$ und $\hat{n}_g$. Sie sollten das Ergebnis

$$\hat{L}_z = \hbar\left(\hat{n}_g - \hat{n}_d\right)$$

erhalten.

e) Die Quantenzahlen des Systems werden so gewählt, dass die Eigenwerte von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ die Form $(n+1)\hbar\omega$ und $\hbar m$ annehmen. Die gleichzeitig Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ können durch $|n_d, n_g\rangle$ ausgedrückt werden. Was sind n_d und n_g in Bezug auf n und m? Bestimmen die Quantenzahlen n den Zustand des Systems vollständig? Können n und m den Zustand vollständig bestimmen?

f) Der n-te Eigenzustand von $\hat{H}$ ist $n+1$-fach entartet. Wenn die Energie des Systems $(n+1)\hbar\omega$ ist, was sind dann die möglichen Werte für (n_d, n_g)? Was sind die möglichen Werte von m?

Aufgabe 3 *Sphärisches Potential*

Ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential befindet sich in einem gemeinsamen Eigenzustand von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit Eigenwerten $\hbar^2 l(l+1)$ bzw. $\hbar m$. Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte bezüglich des Zustandes $|l, m\rangle$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

a) $\left\langle \hat{L}_x \right\rangle = \left\langle \hat{L}_y \right\rangle = 0$

b) $\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle = \left\langle \hat{L}_y^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2}{2}$
Interpretieren Sie dieses Ergebnis mit Hilfe von $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$.

c) $\left\langle \hat{L}_x \hat{L}_y \right\rangle = \frac{1}{2} i\hbar^2 m$

Die Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ in Ortsdarstellung sind die sogenannten Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$.
Hinweis: Nutzen Sie die Auf- und Absteigeoperatoren für den Drehimpuls

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \ .$$

Die Wirkung dieser Operatoren auf die Eigenzustände von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ lautet

$$\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \hbar \left(l(l+1) - m(m \pm 1) \right)^{1/2} |l, m \pm 1\rangle \ .$$

Aufgabe 4 *Kommutatoren und hermitesche Operatoren*

a) Betrachten Sie ein eindimensionales Problem, wobei das System ein Teilchen mit Masse m in einem Potential $\hat{V}(\hat{x})$ ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}) \ .$$

Bestimmen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{H}, \hat{x}\right]$, $\left[\hat{H}, \hat{p}\right]$ und $\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{y}\right]$.

b) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ hermitesch ist, wobei $m \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U} = e^{-i\hat{K}t/\hbar}$ unitär ist, wobei $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 *Potentialwall*

Betrachten Sie ein Teilchen mit der Masse m, welches von links auf einen Potentialwall

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ V_0 & \text{für} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{für} \quad a < x \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ trifft. Untersuchen Sie nun die stationäre Lösung des Teilchens für die Energien $0 < E < V_0$ des Teilchens. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

a) Bestimmen Sie die stationären Eigenfunktionen des Teilchens mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung ohne explizit die Koeffizienten, die über die Randbedingungen im System bestimmte werden, zu berechnen. Fixieren Sie dabei den Wert des Koeffizienten der einlaufenden Welle auf eins.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Randbedingungen vier Gleichungen für die in den Eigenfunktionen auftauchenden Koeffizienten.

c) Bestimmen Sie nun die Koeffizienten in den stationären Eigenfunktionen des Teilchens.

d) Berechnen Sie den Reflektionskoeffizienten und den Transmissionskoeffizienten mit Hilfe der berechneten stationären Eigenfunktionen.