Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 11** **23. Juni 2018**
Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 29.06.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 32 *Gammafunktion und Stirling-Formel*

Die allgemeine Definition der Gammafunktion für $x \geq 1$ lautet

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy\ y^{x-1} e^{-y} \quad .$$

a) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\Gamma(n+1) = n! \quad .$$

(1 Punkt)

b) Leiten Sie die Stirling-Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad , \quad \text{fÜr } n \gg 1$$

als Näherung der Fakultät für große Zahlen n her. Verwenden Sie hierbei die Gamma Funktion aus a) und substituieren Sie $y = x \cdot n$. Approximieren Sie das verbleibende Integral mithilfe der Sattelpunktsnäherung

$$\int_a^b dx\ e^{nf(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}} e^{nf(x_0)}, \text{ für } n \gg 1 \ ,$$

für f zweimal stetig differenzierbar, beliebige Endpunkte $a < b$, und x_0 das globale Maximum von f. *(1 Punkt)*

Aufgabe 33 *Phasenraumvolumen*

Das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit dem Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 ... \int dx_n}_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2}$$

bestimmen, wobei dV_n das n-dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten bezeichnet und R den Radius der n-dimensionalen Kugel darstellt.

a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1) R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil (a) das Volumenelement dV_n in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie kann aus dV_n das Volumen V_n berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der von R unabhängige Anteil? *(1 Punkt)*

c) Um nun konkret $V_n(1)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-\left(x_1^2 + ... x_n^2\right)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ mithilfe der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\ e^{-t} t^{x-1}$ aus. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der n-dimensionalen Kugel

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(n/2+1)}$$

gilt, wobei $n/2\Gamma(n/2) = \Gamma(n/2+1)$ ist. *(1 Punkt)*

e) Betrachten Sie ein Ensemble aus N klassischen, unterscheidbaren, nicht wechselwirkenden, eindimensionalen harmonischen Oszillatoren mit einer Frequenz ω. Berechnen Sie das Phasenraumvolumen für dieses System bei einer Energie von E im mikrokanonischen Ensemble. *(2 Punkte)*

Aufgabe 34 *Virialentwicklung*

Die thermische Zustandsgleichung für ein reales Gas kann in der Dichte $n = N/V$ entwickelt werden:

$$pV = Nk_BT\left[1 + A_2(T)\frac{N}{V} + A_3(T)\left(\frac{N}{V}\right)^2 + ...\right] , \tag{1}$$

wobei p den Druck, V das Volumen, N die Teilchenanzahl und T die Temperatur des Systems angibt. Diese Entwicklung wird Virialentwicklung genannt.

a) Berechnen Sie die Virialkoeffizienten $A_i(T)$ für das Van-der-Waals Gas, dessen thermische Zustandsgleichung

$$\left(p + n^2a\right)(1 - nb) = nk_BT \tag{2}$$

lautet. Berechnen Sie zudem die Boyle-Temperatur T_B, die über $A_2(T_B) = 0$ definiert ist. *(2 Punkte)*

b) Die kritische Temperatur T_c, der kritische Druck p_c und das kritische Volumen V_c sind über

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=T_c} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=T_c} = 0 \tag{3}$$

definiert. Zeichnen Sie den Druck p als Funktion von dem Volumen V für eine Temperatur T für die Fälle $T \gg T_c$, $T = T_c$ und $T \ll T_c$. Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c, den kritischen Druck p_c und das kritische Volumen V_c für das Van-der-Waals Gas. Zeigen Sie zudem, dass T_c, p_c und V_c des Van-der-Waals Gases die universelle Beziehung

$$Nk_B\frac{T_c}{p_cV_c} = \frac{8}{3}$$

erfüllt. *(2 Punkte)*

c) Benutzen Sie die reskalierten Variablen $p' = p/p_c$, $T' = T/T_c$ und $V' = V/V_c$, um die thermische Zustandsgleichung des Van-der-Waals Gases ohne explizites Auftreten der Parameter a und b zu schreiben. *(2 Punkte)*