Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 12** **30. Juni 2018**

Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 06.07.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 35 *Jacobi-Determinante*

Im Folgenden wird der Formalismus der Jacobi-Determinante eingeführt, der für den Umgang mit Zustandsvariablen sehr nützlich sein kann.
Es seien zwei Funktionen f, g von zwei Variablen x, y gegeben. Wenn man (f, g) als die beiden Komponenten einer vektorwertigen Funktion F von x, y auffasst, dann ist

$$DF = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \end{bmatrix}$$

die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) dieser Funktion F. Die sogenannte Jacobi-Determinante lautet

$$\frac{\partial\,(f,g)}{\partial\,(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass man die partielle Ableitung mit Hilfe der Jacobi-Determinante als

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial\,(f,y)}{\partial\,(x,y)}$$

schreiben kann. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Determinante ihr Vorzeichen wechselt beim Vertauschen zweier Spalten:

$$\frac{\partial\,(f,g)}{\partial\,(x,y)} = -\frac{\partial(g,f)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial\,(f,g)}{\partial\,(y,x)} = \frac{\partial\,(g,f)}{\partial\,(y,x)}$$

(1 Punkt)

c) Hängen nun x und y von weiteren unabhängigen Variablen u und v ab, so gilt

$$\frac{\partial\,(f,g)}{\partial\,(x,y)} = \frac{\partial\,(f,g)}{\partial\,(u,v)} \cdot \frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(x,y)} \quad . \tag{1}$$

Zeigen Sie die Kettenregel (1). *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial f}\right)_v} \quad .$$

(1 Punkt)

Bonus-Punkte (e,f): Wir betrachten drei Variablen, die eine Bedingung $F(x, y, z) = 0$ erfüllen. Dann hängt x von y und z ab, $x(y, z)$, und Funktionen dieser Variablen hängen nur von zwei der Variablen ab, z.B. $w(x, y)$.

e) Zeigen Sie die Gültigket der Relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad .$$

(2 Punkte)

f) Es sei w eine weitere Funktion von irgend zweier dieser Größen. Zeigen Sie die Relationen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \; .$$

(1 Punkt)

Aufgabe 36 *Mischung zweier Gase*

Aus der Vorlesung ist Ihnen die Entropie eines idealen Gases aus N Teilchen mit der Gesamtenergie E in einem abgeschlossenen System mit dem Volumen V bekannt:

$$S(E, V, N) = k_B N \left[\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{E}{N}\right) + \frac{5}{2} + \ln(C) \right] \; ,$$

wobei C eine Konstante darstellt.

a) Leiten Sie die Entropie des idealen Gases als Funktion von der Temperatur T, des Volumens V und der Teilchenanzahl N in diesem abgeschlossenen System her. Sie sollten den Ausdruck

$$S(T, N, V) = k_B N \left[\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}k_B T\right) + \frac{5}{2} + \ln(C) \right]$$

erhalten. *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie nun ein abgeschlossenes System mit zwei Kammern, die durch eine Trennwand separiert sind und mit zwei verschiedenen idealen Gasen A und B unter gleichem Druck und bei gleicher Temperatur gefüllt sind. Die Kammer mit dem Gas A besitzt ein Volumen von V_A und N_A Teilchen. Die Kammer mit N_B Teilchen der Sorte B besitzt ein Volumen von V_B. Geben Sie einen Ausdruck für die Entropie des Gesamtsystems an. *(1 Punkt)*

c) Nun wird die Trennwand zwischen den beiden Systemen heraus gezogen und die beiden Gase können in den ganzen Behälter diffundieren, bis sie eine neue Gleichgewichtssituation erreichen. Temperatur und Druck ändern sich bei diesem Prozess nicht. Die Entropie nimmt jedoch um einen bestimmten Betrag zu. Bestimmen Sie den Betrag, um den die Entropie durch das Mischen der beiden Subsysteme zunimmt. *(2 Punkte)*

d) Betrachten Sie nun zwei identische Gase $A = B$ in den zwei Kammern. Berechnen Sie ebenfalls die Entropieänderung beim Mischen der beiden Subsysteme. *(2 Punkte)*

Aufgabe 37 *Maximum der Entropie*

Betrachten Sie ein abgeschlossenes System, das aus zwei zunächst ebenfalls abgeschlossenen und im Gleichgewicht befindlichen Teilsystemen mit den Werten E_1, N_1, V_1 bzw. E_2, N_2, V_2 für die Energie, das Volumen und die Teilchenanzahl besteht.

a) Zeigen Sie, dass die Entropie des Gesamtsystems die Form

$$S_{1,2} = \frac{3}{2} k_B \left(N_1 \ln(E_1) + N_2 \ln(E_2) \right) + \text{ Terme },$$

die unabhängige von den Energien sind, besitzt. *(1 Punkt)*

b) Die beiden Teilsysteme werden nun miteinander in Kontakt gebracht, so dass sie untereinander Energie austauschen können. Die Teilsysteme tauschen nun solange Energie aus bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat und die Entropie des abgeschlossenen Systems maximiert wird. Leiten Sie eine Beziehung zwischen den Energien $\tilde{E}_1$ und $\tilde{E}_2$ der Teilsysteme her, die die Entropie des Systems maximieren. *(2 Punkte)*

c) Diese Aufgabe soll Ihnen demonstrieren, dass das Maximum der Entropie im mikrokanonischen Ensemble ein sehr scharfes Maximum ist. Betrachten Sie zu diesem Zweck die Entropie für die Energien $E_1' = \tilde{E}_1 \pm \Delta$ und $E_2' = \tilde{E}_2 \pm \Delta$, die sich von den Energien, die die Entropie maximieren, um Δ unterscheiden. Leiten Sie zudem einen Ausdruck für die Entropie her für sehr kleine Änderungen der Energie $\tilde{E}_1$ und $\tilde{E}_2$ ($\Delta/\tilde{E}_1 \ll 1$ & $\Delta/\tilde{E}_2 \ll 1$).
Hinweis: Die folgenden Entwicklungen können dabei hilfreich sein

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

(2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Anzahl der Mikrozustände $\Omega_{1,2}$ im Gesamtsystem für die Energien E_1' und E_2' der Teilsysteme. Sie sollten den folgenden Ausdruck

$$\Omega_{1,2} = (\Omega_{1,2})_{max} \exp\left[-\frac{3}{4} \frac{\Delta^2}{E^2} N^2 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right) \right]$$

erhalten, wobei E die Energie des abgeschlossenen Gesamtsystems darstellt. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie den Faktor um den $\Omega_{1,2}$ kleiner ist als der Maximalwert $(\Omega_{1,2})_{max}$ für $N_1 = N_2 = 5 \cdot 10^{22}$ und $\Delta/E = 10^{-10}$. *(1 Punkt)*