Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 13** **8. Juli 2018**
Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 13.07.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 38 *Maxwell-Boltzmann Verteilung und kanonisches Ensemble*

Betrachten Sie ein klassisches System aus N Teilchen der Masse m, das sich im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T befindet. Wir wissen, dass die Gesamtenergie des Systems als Summe der kinetischen Energie $K(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ und der potentiellen Energie $U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ geschrieben werden kann. Die kinetische Energie ist eine quadratische Funktion der Impulse $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$, während die potentielle Energie eine Funktion der Positionen $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ ist. Für die Gesamtenergie gilt $E = K + U$.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ an, im kanonischen Ensemble einen bestimmten Mikrozustand $\{\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ vorzufinden. Die Normalisierungskonstante kann dabei vernachlässigt werden. Beachten Sie außerdem, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Orte und Impulse unabhängig voneinander sind. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1, \ldots, \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_N$ der Teilchen-Impulse an. Die korrekte Normalisierung kann erneut vernachlässigt werden. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen eine Geschwindigkeit im Intervall $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} + \mathrm{d}\boldsymbol{p}]$ besitzt, durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} f^{(1)}(p_x, p_y, p_z)\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z &= \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mk_BT}} \mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} p^2\mathrm{d}p, \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben ist, wobei $p = |\boldsymbol{p}|$. Dies ist die sogenannte Maxwell-Boltzmann Verteilung. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie den Mittelwert

$$\frac{<\boldsymbol{p}^2>}{2m} = \frac{<p_x^2 + p_y^2 + p_z^2>}{2m} \tag{2}$$

und zeigen Sie, dass die durchschnittliche kinetische Energie des Systems durch

$$<K>= \frac{3}{2} N k_B T \tag{3}$$

gegeben ist. *(3 Punkte)*

e) Betrachten Sie nun das Gas der Atomsphäre im homogenen Gravitationsfeld der Erde:

$$U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} mgz_i, \quad z_i \in [0, \infty]. \tag{4}$$

Geben Sie analog zu den Punkten a) und b) die Wahrscheinlichkeitsverteilung $g(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_1, \ldots, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}_N$ der Teilchenpositionen an. Erneut kann die korrekte Normalisierung vernachlässigt werden. *(1 Punkt)*

f) Berechnen Sie schließlich für ein einzelnes Teilchen die Wahrscheinlichkeit $g^{(1)}(z)\mathrm{d}z$ sich in einer Höhe zwischen z und $z + \mathrm{d}z$ zu befinden, diesmal unter Beachtung der korrekten Normalisierung. Dies ist die barometrische Höhenformel. *(2 Punkte)*

Aufgabe 39 *Einatomiges, ideales Gas*

Wie bereits gezeigt, ist die Entropie $S = S(E, V, N)$ eines idealen, einatomigen Gases mit N Teilchen in einem Volumen V und mit Energie E durch den Ausdruck

$$S(E, V, N) = k_B N \left[\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{E}{N}\right) + \frac{5}{2} + \ln(C) \right]$$

gegeben, wobei C eine Konstante darstellt.

a) Bestimmen Sie mithilfe der kalorischen Zustandsgleichung die freie Energie $F(T, V, N) = E - TS$. *(2 Punkte)*

b) Benutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a), um die freie Enthalpie $G(T, p, N) = F + pV$ zu bestimmen. *(1 Punkt)*

c) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Enthalpie $H(S, p, N) = E + pV = G + TS$. *(1 Punkt)*