# Tutorium zur Vorlesung
# Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

**SoSe 2018** **Tutorien-Blatt** **15. Juli 2018**

**Dr. Schank**
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

**Alle Punkte von diesem Blatt sind Bonuspunkte. Das Blatt wird am 07.08. im Tutorium vor der Klausur besprochen. Zum Erhalten der Bonuspunkte sind die Lösungen zu Beginn letzten Übung (Terminfindung ausstehend) in Form einer Einzelabgabe einzureichen.**

## Aufgabe 40 *Ultrarelativistisches Gas*

Wir wollen mit Hilfe des kanonischen Ensembles die thermodynamischen Eigenschaften eines ultrarelativistischen klassischen Gases berechnen. Ein solches Gas besteht aus masselosen Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (z.B. Photonen). Nach der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung gilt

$$\epsilon = \left(\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4\right)^{1/2} \to \epsilon = |\mathbf{p}|c \;\text{ für }\; m = 0.$$

Das ultrarelativistische Gas wird auch oft als leicht zu berechnendes Modell für Teilchen mit Masse $m \neq 0$ benutzt, wenn nur die zur Verfügung stehende Energie pro Teilchen $\epsilon \ll mc^2$, oder gleichbedeutend, wenn die Temperatur sehr hoch ist, so dass die Ruheenergie $mc^2$ gegen die kinetische Energie vernachlässigt werden kann. Die Hamilton-Funktion $H$ für das ultrarelativistische Gas lautet:

$$H = \sum_{i=1}^{N} c \left(p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2\right)^{1/2} \;,$$

wobei $N$ die Anzahl der ultrarelativistischen Teilchen angibt.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z$ des ultrarelativistischen Gases. Sie sollten das Ergebnis

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N$$

mit der thermischen Wellenlänge $\lambda = hc/k_B T(8\pi)^{1/3}$ des ultrarelativistischen Gases erhalten.
**Hinweis:** Sie können dabei das folgende Integral benutzen:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt\; t^x e^{-t} = x! \;\text{ falls }\; x \in \mathbb{N}_0 \;.$$

*(5 Punkte)*

b) Berechnen Sie aus der Zustandssumme $Z$ die freie Energie $F(T, V, N)$ des Systems, wobei wir annehmen, dass $N \gg 1$. Sie sollten das Ergebnis

$$F(T,V,N) = -Nk_BT\left(1 + \ln\left\{\frac{8\pi V}{N}\left(\frac{k_BT}{hc}\right)^3\right\}\right)$$

erhalten. *(3 Punkte)*

c) Aus der freien Energie $F(T,V,N)$ können alle thermodynamischen Eigenschaften berechnet werden. Berechnen Sie den Druck $p$ und damit die Zustandsgleichung des ultrarelativistischen Gases. Berechnen Sie zudem die Entropie $S$ und das chemische Potential $\mu$ des Systems. *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Energie $E$ des Systems. *(2 Punkte)*

## Aufgabe 41 *Eigenzustände eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators*

Betrachten Sie den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator (1) äquivalent zu

$$\hat{H} = \left(\hat{n}_x + \hat{n}_y + \hat{\mathbb{1}}\right)\hbar\omega,\ \hat{n}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x,\ \hat{n}_y = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$$

ist. *(2 Punkte)*

b) Drücken Sie den Operator der z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ als Funktion von $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ aus. Sie sollten das Ergebnis

$$\hat{L}_z = i\hbar\left(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y\right)$$

erhalten. Beachten Sie, dass $\left[\hat{a}_x, \hat{a}_y^\dagger\right] = 0$ und $\left[\hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger\right] = 0$ gilt. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ einen gemeinsamen Satz simultaner Eigenvektoren haben. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \left(\hat{n}_d + \hat{n}_g + \hat{\mathbb{1}}\right)\hbar\omega$$

mit

$$\hat{n}_d = \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d,\ \hat{n}_g = \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g,\ \hat{a}_g = \left(\hat{a}_x - i\hat{a}_y\right)/\sqrt{2},\ \hat{a}_d = \left(\hat{a}_x + i\hat{a}_y\right)/\sqrt{2}$$

ausgedrückt werden kann. Schreiben Sie $\hat{L}_z$ in Bezug auf $\hat{n}_d$ und $\hat{n}_g$. Sie sollten das Ergebnis

$$\hat{L}_z = \hbar\left(\hat{n}_g - \hat{n}_d\right)$$

erhalten. *(2 Punkte)*

e) Die Quantenzahlen des Systems werden so gewählt, dass die Eigenwerte von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ die Form $(n+1)\hbar\omega$ und $\hbar m$ annehmen. Die gleichzeitig Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ können durch $|n_d, n_g\rangle$ ausgedrückt werden. Was sind $n_d$ und $n_g$ in Bezug auf $n$ und $m$? Bestimmen die Quantenzahlen $n$ den Zustand des Systems vollständig? Können $n$ und $m$ den Zustand vollständig bestimmen? *(2 Punkte)*

f) Der $n$-te Eigenzustand von $\hat{H}$ ist $n+1$-fach entartet. Wenn die Energie des Systems $(n+1)\hbar\omega$ ist, was sind dann die möglichen Werte für $(n_d, n_g)$? Was sind die möglichen Werte von $m$? *(2 Punkte)*

## Aufgabe 42 *Eindimensionales Potentialproblem*

Betrachten Sie ein Teilchen, welches sich in folgendem eindimensionalen Potential $V(x)$ befindet:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m\cosh^2(ax)}$$

Dabei sei $a > 0$ eine Konstante und $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ der Kosinus Hyperbolicus.

a) Zeigen Sie, dass $\psi_0(x) = \frac{A}{\cosh(ax)}$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung zu diesem Potential löst und bestimmen Sie die zugehörige Energie $E_0$ des Zustandes.
**Hinweis:** Die Ableitung der Hyperbelfunktionen sind $\partial_x^2 \sinh(x) = \partial_x \cosh(x) = \sinh(x)$. Außerdem gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. *(3 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $A$. *(1 Punkt)*

## Aufgabe 43 *Sphärisches Potential*

Ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential befindet sich in einem gemeinsamen Eigenzustand von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit Eigenwerten $\hbar^2 l(l+1)$ bzw. $\hbar m$. Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte bezüglich des Zustandes $|l,m\rangle$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

a) $\left\langle \hat{L}_x \right\rangle = \left\langle \hat{L}_y \right\rangle = 0$ *(2 Punkte)*

b) $\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle = \left\langle \hat{L}_y^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2}{2}$
Interpretieren Sie dieses Ergebnis mit Hilfe von $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. *(3 Punkte)*

c) $\left\langle \hat{L}_x \hat{L}_y \right\rangle = \frac{1}{2} i\hbar^2 m$ *(1 Punkt)*

Die Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ in Ortsdarstellung sind die sogenannten Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$.
**Hinweis:** Nutzen Sie die Auf- und Absteigeoperatoren für den Drehimpuls

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \ .$$

Die Wirkung dieser Operatoren auf die Eigenzustände von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ lautet

$$\hat{L}_\pm |l,m\rangle = \hbar \left(l(l+1) - m(m \pm 1)\right)^{1/2} |l, m \pm 1\rangle \ .$$