Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 1** **13. April 2018**

Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 20.04.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 1 *Bohr-Sommerfeld-Quantisierung*

In Rahmen der alten Quantentheorie wurden Theorien entwickelt zur Erläuterung von experimentellen Resultaten, die nicht mit Hilfe der klassischen Mechanik erklärt werden konnten. Dabei wurden die Postulate der klassischen Mechanik mit neuen Hypothesen kombiniert. Ein Beispiel dafür ist die Bohr-Sommerfeld Hypothese, in der angenommen wird, dass das System den Postulaten der klassischen Mechanik unterliegt, jedoch nur Trajektorien erlaubt sind, welche die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung

$$\oint_{H(q,p)=E} p(q)dq = 2\pi n\hbar \tag{1}$$

erfüllen. Dabei ist q eine generalisierte Koordinate des Systems und p der dazu kanonisch konjugierte Impuls. Des Weiteren entspricht n einer ganzen Zahl und das Integral wird über eine Periode der Bewegung des Teilchens bei einer konstanten Energie ausgeführt. In dieser Aufgabe soll die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung (5) auf einige einfache, klassische Systeme angewandt werden. Wie sich herausstellte, reicht die Bohr-Sommerfeld Hypothese nicht aus, um Phänomene der Quantenmechanik ausreichend zu beschreiben, so dass die Postulate der heutigen Quantenmechanik aufgestellt werden mussten. Dennoch sind diese Aufgaben gute Rechenübungen.

a) Bestimmen Sie für ein Teilchen mit Masse m im Potential $V(x) = a|x|$, wobei $a > 0$, die Energie E_n des Systems in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie für ein Teilchen mit der Masse m im homogenen Gravitationsfeld die Energie E_n des Systems in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *(Ir)relevanz der Quantenmechanik*

Mit Hilfe der *Bohr-Sommerfeld Quantisierung* kann die Energie eines harmonischen Oszillators wie folgt quantifiziert werden.

$$E_n = n\omega\hbar, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \hbar \approx 1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}, \tag{2}$$

wobei k die elastische Konstante darstellt und m die Masse des Teilchens. Berechnen Sie für jeden der folgenden Fälle explizit die Änderung der Energie, wenn die Quantenzahl n um 10^3 erhöht wird. Geben Sie die Ergebnisse in der physikalischen Einheit Joule an.

a) Die Frequenz des Oszillators beträgt $\omega = 1$ Hz. *(1 Punkt)*

b) Die elastische Konstante beträgt $k = 200$ N/m und die Masse nimmt den Wert $m = 500$ g an. *(1 Punkt)*

c) Betrachten Sie nun den zweiten Fall *b)* und nehmen Sie an, dass die Masse mit einer maximalen Auslenkung von $l_{\max} = 1$ cm oszilliert. Bestimmen Sie n für diesen Fall. Schätzen Sie die Änderung in der maximalen Auslenkung, wenn die Quantenzahl n um 10^3 erhöht wird. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3 *Fourier-Transformation*

Die Fourier-Transformation $g(k)$ von der Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$g(k) = FT[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ixk} \tag{3}$$

und die Inverse Fourier-Transformation $h(x)$ von der Funktion $g(k)$ ist definiert als

$$h(x) = FT^{-1}[g(k)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ g(k) e^{ixk}. \tag{4}$$

Wenn x als Ortsvariable betrachtet wird, entspricht die Transformation FT einem Darstellungswechsel zwischen Orts- und Impulsraum.

a) Beweisen Sie, dass $h(x) = f(x)$ unter Benutzung der Identitäten (2) und (3).
Hinweis: Benutzen sie $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx} = \delta(x)$. *(1 Punkt)*

b) Beweisen Sie den Satz von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ |g(k)|^2\ . \tag{5}$$

Dieser Satz zeigt, dass die Fourier-Transformierte einer Funktion dieselbe Norm besitzt wie die Funktion selbst. *(2 Punkte)*