Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 2** **20. April 2018**

Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 27.04.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 4 *Fourier-Transformation*

Betrachten Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} A & \text{für} -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1a}$$

$$f_2(x) = Be^{-\frac{|x|}{b}}, \tag{1b}$$

wobei a und b positive Konstanten darstellen.

a) Bestimmen Sie $A > 0$ und $B > 0$, so dass die Funktionen aus Gl. (1) bezüglich der Norm

$$|f| = \sqrt{\langle f(x)|f(x)\rangle} \tag{2}$$

auf 1 normiert sind. Das Skalarprodukt $\langle f(x)|h(x)\rangle$ ist dabei definiert als

$$\langle f(x)|h(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)h(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $g_i(k)$ der Funktion $f_i(x)$ aus Gl.(1), wobei $i = 1, 2$. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Standardabweichung Δx_i und Δk_i der Funktionen $|f_i(x)|^2$ und $|g_i(k)|^2$, wobei $i = 1, 2$. Zeigen Sie des weiteren, dass die Ungleichung $\Delta x_i \cdot \Delta k_i \geq \frac{1}{2}$ für $i = 1, 2$ erfüllt ist.

Hinweis: Sie dürfen dabei

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(1 + c^2 \cdot y^2)^2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2c^3}, \text{ für } c > 0 \tag{4}$$

benutzen. *(3 Punkte)*

Aufgabe 5 *Quantenteilchen im unendlich hohen Potentialtopf*

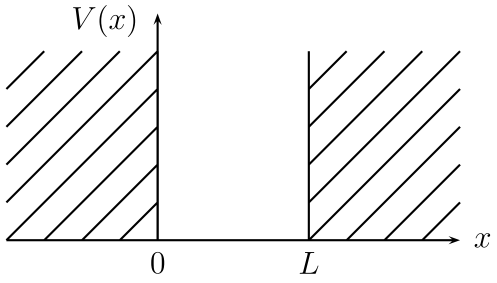
Ein Teilchen der Masse m ist zwischen zwei undurchdringlichen Wänden gefangen. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) \text{ , mit } \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{5}$$

Das Potential sei gegeben durch

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } 0 < x < L \\ \infty & \text{, sonst} \end{cases} \tag{6}$$

mit $L > 0$:



a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & \text{, für } 0 < x < L \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

die stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$ für das Potential (6) erfüllt und bestimmen Sie die Konstante A, sodass die Funktionen mit $|\psi_n(x)|^2 = 1$ normalisiert sind. Geben Sie die Energieeigenwerte E_n zu den Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ an. *(3 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ symmetrisch oder antisymmetrisch im Bezug auf den Mittelpunkt der Box sind. Für welche n sind die Eigenfunktionen symmetrisch? *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie unter Benutzung der Definition (3), dass die Eingenfunktionen $\psi_n(x)$ die Relation

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm} \tag{7}$$

erfüllen und somit orthogonal zueinander stehen. *(2 Punkte)*

Aufgabe 6 *Eindimensionale Schrödinger Gleichung*

Die eindimensionale zeitabhänginge Schrödingergleichung für ein Teilchen ist gegeben durch

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x,t) \ . \tag{8}$$

In dieser Aufgabe werden Sie die allgemeine Lösung dieser Schrödingergleichung für ein freies Teilchen (V(x) = 0) im kontinuierlichen Raum bestimmen.
Betrachten Sie dazu vorerst die eindimensionale partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$i\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = Kf(x,t) \ , \text{ mit } K \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung (9) äquivalent ist zu

$$-\omega g(x,\omega) = Kg(x,\omega), \tag{10}$$

mit $g(x,\omega)$ als die Fourier-Transformierte von $f(x,t)$, und geben Sie die Lösung der Gleichung (10) an. *(2 Punkte)*

b) Ersetzen Sie nun K in Gleichung (9) mit dem Differentialoperator $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und bestimmen Sie die Lösung der resultierenden partiellen Differentialgleichung. *(2 Punkte)*

c) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung (8) für ein freies Teilchen (V(x) = 0) im kontinuierlichen Raum an. *(1 Punkt)*