Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 3** **April 22, 2018**

Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 04.05.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 7 *Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf: Teil 2*

In Aufgabe 5 wurde ein Teilchen betrachtet, welches zwischen zwei undurchdringlichen Wänden gefangen ist. Im Folgenden werden die Ergebnisse und Notationen der Aufgabe 5 genutzt, um das System weiter zu untersuchen. Die normierten Eigenfunktionen eines Teilchens in dem Potential aus Aufgabe 5 können als

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ mit } n = 1, 2, 3, ... \tag{1}$$

geschrieben werden, wobei x die Ortsvariable, n die Quantenzahl und L die Breite des Potentialtopfes angibt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte ein Teilchen am Ort x im Potentialtopf anzutreffen. Zeichnen Sie für die ersten drei Quantenzahlen n diese Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion vom Ort x. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie explizit die Erwartungswerte $\langle x\rangle$ und $\langle x^2\rangle$ mit Hilfe der Teilaufgabe a). *(2 Punkte)*

c) Berechnen sie nun die Erwartungswerte $\langle p\rangle$ und $\langle p^2\rangle$. Bestimmen Sie aus den Erwartungswerten aus Teilaufgabe b) und c) die Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p$, wobei Δx und Δp die Standardabweichungen der Wahrscheinlichkeitsdichten im Ort-und Impulsraum darstellen. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die zeitabhängigen Eigenfunktionen $\psi_n(x, t)$. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsstromdichte j für jede Quantenzahl n. *(2 Punkte)*

Aufgabe 8 *Zerfließen eines Gaußschen Wellenpakets*

Das normierte Gaußsche Wellenpaket sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ortsraum gegeben durch

$$\psi(x, t = 0) = \left(\frac{2}{a^2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \cdot e^{ik_0 x} \ , \tag{2}$$

und im Impulsraum durch (vgl. Blatt 0, Präsenzübung)

$$g(k, t = 0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{a^2}{4}(k - k_0)^2\right) \tag{3}$$

a) Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion $\psi(x, t)$.
Tipp: Betrachten Sie das Problem im Impulsraum und transferieren Sie anschließend die zeitliche Entwicklung in den Ortsraum. *(3 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die zeitabhängigen Standardabweichungen $\Delta x(t)$ und $\Delta k(t)$ der Verteilungen $|\psi(x,t)|^2$ im Impulsraum bzw. $|g(x,t)|^2$ im Ortsraum. Zeigen Sie, dass für das Gaußsche Wellenpaket während der seitlichen Entwicklung die Unschärfe-Relation $\Delta x(t)\Delta k(t) \geq \frac{1}{2}$ gilt. *(3 Punkte)*

Aufgabe 9 *Ehrenfest Theorem*

a) Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem 3-dimensionalen Potential $V(\mathbf{r})$. Beweisen Sie die Relation

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = - \langle \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \rangle \tag{4}$$

zwischen dem Erwartungswert des Impulses des Teilchens und dem Erwartungswert der Ableitung des Potentials. Diese Relation wird auch das Ehrenfest Theorem für den Impuls genannt. In Gl. (4) ist $\hat{\mathbf{p}}$ der Impulsoperator und sein Erwartungswert im Ortsraum ist definiert über

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right) \psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}_{op} \psi(\mathbf{r}, t) \ . \tag{5}$$

Der zweite Erwartungswert in Gl. (4) entspricht ebenfalls dem Erwartungswert im Ortsraum und lautet

$$\langle \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \rangle = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \left(\nabla V(\mathbf{r})\right) \psi(\mathbf{r}, t) \ , \tag{6}$$

wobei $\psi(\mathbf{r}, t)$ die Wellenfunktion des Teilchens darstellt. *(3 Punkte)*

b) Im Allgemeinen ist die Identität

$$\langle \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \rangle = \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle} \tag{7}$$

nicht korrekt. Zeigen Sie, dass die Relation (7) für ein harmonisches Potential $V(x) = \lambda x^2$ erfüllt ist. Welche Größe muss verschwinden, so dass die Relation (7) für das Potential $V(x) = \lambda x^3$ erfüllt ist? Die Konstante λ nimmt dabei nicht den Wert Null an. *(2 Punkte)*