# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

**SoSe 2018** **Blatt 4** **May 2, 2018**
**Dr. Schank**
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

**Ihre Lsung ist zu Beginn der Übung am 11.05.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.**

## Aufgabe 10 *Harmonischer Oszillator*

Im Folgenden betrachten wir einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit der Masse $m$ und dem Potenital $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Die Wellenfunktion

$$\psi_0 = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

beschreibt den Grundzustand des harmonischen Oszillators. Höher angeregte Zustände sind gegeben durch

$$\psi_n = N_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\psi_0\ ,$$

mit $N_n = (2^n n!)^{-1/2}$ und $H_n(x)$ dem Hermiteschen Polynom von Grad n. Für $H_n(x)$ gilt:

1. $H_0(x) = 1$
2. $H_1(x) = 2x$
3. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ , für $n \in \mathbb{N}$
4. $\frac{\partial}{\partial x}H_n(x) = 2nH_{n-1} = 2xH_n - H_{n+1}$
5. $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi_0$ die stationäre Schrödingergleichung für den Oszillator löst und bestimmen Sie die Normalisierungskonstante $A$. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\psi_n$ und die Wahrscheinlichkeitsdichten $|\psi_n|$ für den Grundzustand und die ersten drei angeregten Zustände. Diskutieren Sie die Symmetrien der Zustandsfunktionen $\psi_n$ und die Ortserwartungswerte $\langle x\rangle_n$ zu den jeweiligen Zuständen. *(3 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die angeregten Zustände $\psi_n$ die Schrödingergleichung erfüllen und bestimmen Sie die Energieen $E_n$ der Zustände.
**Tipp 1:** Eine Transformation von $x \to \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\tilde{x}$ kann die Rechnung vereinfachen.
**Tipp 2:** Bestimmen Sie vorerst die zweite Ableitung von $H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Nutzen Sie dazu die Eigenschaft 4. *(3 Punkte)*

## Aufgabe 11 *Deltapotential*

Betrachten Sie ein Teilchen mit der Masse $m$ in einem Deltapotential $V(x) = V_0\delta(x)$, wobei $V_0 < 0$.

a) Berechnen Sie die gebundenen normierten Eigenfunktionen des Teilchens, d.h. die normierten Eigenfunktionen für negative Energien $E$. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Bedingung für die Ableitung der Eigenfunktionen bei $x = 0$, dass nur ein gebundener Zustand erlaubt ist mit der Eigenenergie $E = -\frac{mV_0^2}{\hbar^2 2}$.
**Hinweis:** Die Ableitung der Eigenfunktion für $x < 0$ entspricht nicht der Ableitung der Eigenfunktion für $x > 0$ bei $x = 0$. *(2 Punkte)*

## Aufgabe 12 *Endlicher Potentialtopf*

Lösen Sie die Schrödingergleichung für ein Teilchen mit der Masse $m$ in einem endlichen Potentialtopf

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \ |x| > a \\ -V_0 & \text{für } \ |x| < a \end{cases},$$

wobei $V_0 > 0$. Dabei gehen Sie wie folgt vor.

a) Berechnen Sie die gebundenen Eigenfunktionen $(0 > E > -V_0)$ mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung ohne explizit die Koeffizienten, die über die Randbedingungen im System bestimmt werden, zu berechnen. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Stetigkeit der Eigenfunktionen und der Ableitung der Eigenfunktionen an den Sprungstellen des Potentials vier Gleichungen für die in den Eigenfunktionen auftauchenden Koeffizienten. *(2 Punkte)*

c) Leiten Sie mit Hilfe dieser vier Gleichungen die implizite Gleichung

$$\rho^2 - k^2 + 2\rho k \cot(2ka) = 0 \tag{1}$$

für die entsprechenden Eigenenergien her, wobei $\rho^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E$ und $k^2 = (E + V_0)\frac{2m}{\hbar^2}$ mit $E$ der Eigenenergie des Teilchens. *(3 Punkte)*

d) Diskutieren Sie die Lösungen dieser Gleichung und damit die möglichen Eigenenergien grafisch. Gehen Sie dabei auch auf den Grenzfall $V_0 \to \infty$ ein. *(2 Punkte)*