# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

**SoSe 2018** **Blatt 5** **May 7, 2018**

**Dr. Schank**
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

**Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 18.05.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.**

## Aufgabe 13 *Hermitesche Operatoren*

Erfüllt ein linearer Operator $\hat{A}$ die Relation

$$\left\langle u \middle| \hat{A}u \right\rangle = \left\langle \hat{A}u \middle| u \right\rangle \ , \tag{1}$$

so wird er hermitescher Operator genannt. Das Skalarprodukt ist dabei über

$$\left\langle u \middle| \hat{A}u \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)A(x)u(x)dx \tag{2}$$

definiert und $u(x)$ stellt in Gl. (1) eine beliebige Funktion dar.
Zeigen Sie, dass die Relation (1) die Relation

$$\left\langle f \middle| \hat{A}g \right\rangle = \left\langle \hat{A}f \middle| g \right\rangle \tag{3}$$

impliziert, wobei $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen darstellen.

*Hinweis:* Wenden Sie die Funktionen (i) $u(x) = f(x) + g(x)$ und (ii) $u(x) = f(x) + ig(x)$ auf die Relation (1) an, wobei $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen darstellen. *(3 Punkte)*

## Aufgabe 14 *Operatoren*

In der Vorlesung wurde bereits der inverse, der adjungierte, der transponierte und der konjugierte Operator zu einem Operator definiert. Im Folgenden sollen Sie Relation beweisen, die beim Umgang mit diesen Operatoren hilfreich sind.

a) Zeigen Sie die Relation $(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$, wobei $\hat{A}^{-1}$ ($\hat{B}^{-1}$) der inverse Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) ist. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{A}^*\hat{B}^*$, wobei $\hat{A}^*$ ($\hat{B}^*$) den komplex konjugierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^T = \hat{B}^T\hat{A}^T$, wobei $\hat{A}^T$ ($\hat{B}^T$) den transponierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$, wobei $\hat{A}^{\dagger}$ ($\hat{B}^{\dagger}$) den adjungierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

## Aufgabe 15 *Ort-und Impulsoperator*

Im Ortsraum besteht die Wirkung des Ortsoperators auf eine quadratisch integrierbare Funktion $\psi(\mathbf{r})$ in einer Multiplikation mit dem Vektor $\mathbf{r}$. Die Wirkung des Impulsoperators ist durch Anwendung des Gradientens auf diese Funktion gegeben. Damit sind, wie bereits in der Vorlesung definiert, die Operatoren im Ortsraum durch $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{r}$ und $\mathbf{p}_{op} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}$ gegeben. Bestimmen Sie

a) den transponierten Operator $\mathbf{r}_{op}^{T}$ zum Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ im Ortsraum. *(1 Punkt)*

b) den transponierten Operator $\mathbf{p}_{op}^{T}$ zum Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. *(2 Punkte)*

c) den komplex konjugierten Operator sowohl für den Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ als auch für den Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. *(1 Punkt)*

d) den adjungierten Operator sowohl für den Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ als auch für den Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. Sind die beiden Operatoren hermitesch? *(1 Punkt)*

## Aufgabe 16 *Drehimpulsoperator*

Der Drehimpulsoperator ist definiert als das Kreuzprodukt zwischen dem Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ und dem Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}$: $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$.

a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator hermitesch ist, d.h. $\hat{\mathbf{L}}^{\dagger} = \hat{\mathbf{L}}$.
**Hinweis:** Benutzen Sie dabei den Levi-Civita Tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{für} \quad (i,j,k) \in \{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_x, \hat{x}\right]$, $\left[\hat{L}_x, \hat{y}\right]$ und $\left[\hat{L}_x, \hat{z}\right]$.
**Hinweis:** Der Kommutator ist definiert durch $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_x, \hat{p}_x\right]$, $\left[\hat{L}_x, \hat{p}_y\right]$ und $\left[\hat{L}_x, \hat{p}_z\right]$. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]$. *(1 Punkt)*