Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 8** **2. Juni 2018**

Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 08.06.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 22 *Eindimensionaler harmonischer Oszillator: part 2*

Die Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators werden im Wesentlichen durch die sogenannten Hermitepolynome

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

bestimmt. Im Folgenden sollen Sie einige dieser Eigenfunktionen bestimmen und Eigenschaften der Hermitepolynome zeigen.

a) Berechnen Sie ausgehend von der Differentialgleichung $\hat{a}|0\rangle = 0$ explizit den normierten Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators im Ortsraum. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie den ersten angeregten Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators Anwendung des Aufsteigeoperators $\hat{a}^\dagger$ im Ortsraum auf den Grundzustand. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z-\lambda) = e^{-\lambda^2+2\lambda z}$ die erzeugende Funktion der Hermitepolynome ist, d.h.

$$e^{-\lambda^2+2\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z) \ . \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(z-\lambda)$. *(2 Punkte)*

d) Leiten Sie die Rekursionsbeziehung

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

her.
Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach λ. *(2 Punkte)*

Aufgabe 23 *Operatorfunktion: Exponentialfunktion*

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die Operatorfunktion $e^{\hat{A}}$ der Exponentialfunktion.

a) Der Operator $\hat{A}$ sei nun ein linearer Operator und $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen sie das Potenzgesetz

$$e^{a\hat{A}}e^{b\hat{A}} = e^{(a+b)\hat{A}}$$

für die hier betrachtete Operatorfunktion. *(2 Punkte)*

b) Ein Operator $\hat{U}$ ist nach Definition ein unitärer Operator, wenn sein Inverses $\hat{U}^{-1}$ gleich seinem Adjungierten $\hat{U}^\dagger$ ist:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1} \ .$$

Zeigen Sie nun, dass der Operator $\hat{T} = e^{ia\hat{A}}$ unitär ist, wobei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator ist und $a \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 24 *Pauli-Matrizen und Spin-1/2 System*

Die Pauli-Matrizen σ_i sind gegeben durch:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Pauli-Matrizen:

a) Die Pauli-Matrizen sind selbstadjungiert und unitär *(1 Punkt)*

b) Die Kommutatorrelation $[\sigma_x, \sigma_y] \equiv \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z$ ist erfüllt, sowie die zyklischen Permutationen von dieser Relation: $[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$ und $[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$ *(1 Punkt)*

c) Die Matrizen anti-kommutieren:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0 \ \ \forall (i \neq j) \in \{x, y, z\}$$

(1 Punkt)

d) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T \in \mathbb{R}^3$ ein normalisierter Vektor (mit $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$). Es gilt:

$$e^{-i\alpha\vec{\sigma}} = \cos(\alpha)\mathbb{1} - i\sin(\alpha)\ \vec{\sigma}$$

, wobei $\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$ *(2 Punkte)*

Betrachten Sie nun ein Spin-1/2 System mit dem Anfangszustand

$$|\psi(t=0)\rangle = |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

dessen Zeitentwicklung durch den Hamiltonian operator

$$\hat{H} = -\frac{\omega}{2}(|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow|) \equiv -\frac{\omega}{2}\sigma_x$$

beschrieben wird.

e) Bestimmen Sie die zeitabhängige Wellenfunktion $|\psi(t)\rangle$. *(1 Punkt)*