Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2018 **Blatt 9** **8. Juni 2018**

Dr. Schank
mit Andreas Buchheit, Timo Felser, Luigi Gianelli

Ihre Lösung ist zu Beginn der Übung am 15.06.2018 in Form einer Einzelabgabe einzureichen.

Aufgabe 25 *Radialimpuls*

Die klassische Definition des Radialimpulses

$$p_r = \frac{1}{r}\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\right)$$

mit $r = |\mathbf{r}|$ und $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ muss in der Quantenmechanik wegen der Nichtvertauschbarkeit von $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$ symmetrisiert werden:

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}\right) \; .$$

a) Zeigen Sie, dass der Radialimpuls $\hat{p}_r$ in Ortsdarstellung und in Kugelkoordinaten die Form

$$\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$$

annimmt. Verwenden sie dazu den Gradienten ∇ in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi} \; .$$

(2 Punkte)

b) Welche Bedingung müssen die Wellenfunktionen erfüllen, so dass der Operator $\hat{p}_r$ wie ein hermitescher Operator auf die Wellenfunktionen wirkt? *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen des Radialimpulsoperators $\hat{p}_r$. *(2 Punkte)*

d) Handelt es sich beim Radialimpuls um eine Observable? Begründen Sie ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Aufgabe 26 *Schrödinger-Bild: Drehimpulsoperator*

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Drehimpulsoperators $\hat{\mathbf{L}}$ im Falle eines radialsymmetrischen Potentials $V(r) = V(\|\mathbf{r}\|) = V(\|(x, y, z)\|)$ sich nicht mit der Zeit ändert:

$$\frac{\mathrm{d}\langle\hat{\mathbf{L}}\rangle}{\mathrm{d}t} = 0$$

Hinweis: Bestimmen Sie dazu vorerst den Kommutator $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{H}]$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$, indem Sie zum Einen $[\hat{L}_i, \hat{p}^2]$ für die 3 kartesischen Komponenten L_i des Drehimpulsoperators und zum Anderen $[\hat{\mathbf{L}}, V(r)]$ bestimmen. *(3 Punkte)*

Aufgabe 27 *Kugelflächenfunktionen*

In kugelsymmetrischen Systemen können die Energieeigenzustände in der Produktform $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ ausgedrückt werden. Dabei stellen die Funktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ die sogenannten Kugelflächenfunktionen dar. Die Kugelflächenfunktionen sind die Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators zum Quadrat:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi)$$

und die Eigenfunktionen der z-Komponente des Drehimpulsoperators:

$$\hat{\mathbf{L}}_z Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \phi)$$

in Ortsdarstellung, wobei l und m ganzzahlig sind mit $0 \leq m \leq l$. Definiert sind die Kugelflächenfunktionen über

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} \ ,$$

wobei $P_l^m(x)$ das sogenannte zugeordnete Legendrepolynom darstellt. Die zugeordneten Legendrepolynome $P_l^m(x)$ sind über

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

definiert.

a) Bestimmen Sie die Kugelflächenfunktionen $Y_0^0(\theta, \phi)$, $Y_1^0(\theta, \phi)$ und $Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi)$. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{1}{2}\left(Y_1^{-1} - Y_1^1\right) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$\frac{i}{2}\left(Y_1^{-1} + Y_1^1\right) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta)\sin(\phi) \ .$$

(1 Punkt)

c) Zeigen sie unter Benutzung von $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$ die Relation

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m \left(Y_l^m(\theta, \phi) \right)^*$$

für die Kugelflächenfunktionen. *(2 Punkte)*

d) Die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Zeigen Sie die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen

$$\int \left(Y_l^m(\theta, \phi) \right)^* Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \ ,$$

wobei das Integral über den gesamten Raumwinkel verläuft. Sie sollen dabei die Relation

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}$$

für die zugeordneten Legendrepolynome verwenden. *(2 Punkte)*

Aufgabe 28 *Drehimpuls einer Wellenfunktion*

Betrachten Sie ein spinloses Teilchen, welches durch die Wellenfunktion

$$\psi(x, y, z) = K\,(x + y + 2z)\, e^{-\alpha r} \qquad (1)$$

beschrieben wird, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hierbei sind K und α Konstanten. Die Konstante K wird durch die Normierung der Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ bestimmt.

a) Formulieren Sie die Wellenfunktion in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). Separieren Sie den Radialanteil und den Winkelanteil $\psi(r, \theta, \psi) = R(r)\Phi(\theta, \phi)$ und normieren Sie den Winkelanteil $\Phi(\theta, \phi)$. Stellen Sie dann den Winkelanteil als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen dar.
Hinweis: *Benutzen Sie Aufgabe 27 a) und b).* *(2 Punkte)*

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung der z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z$ den Wert $\hbar$? *(2 Punkte)*

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung des Drehimpulses $\hat{\mathbf{L}}^2$ den Wert $2\hbar^2$? *(1 Punkt)*