Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2019 **Bonus-Blatt** **05.07.2019**

Dr. Schank
mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 12.07.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

Die hier erreichten Punkte zählen als Bonuspunkte für die Klausurzulassung.

Aufgabe 1 *Van-der-Waals Gas*

Im Folgenden sollen Sie das Van-der-Waals Gas als Modell eines klassischen Gases mit Wechselwirkung betrachten.

a) Leiten Sie die kanonische Zustandssumme Z für das Van-der-Waals Gas her. Nehmen Sie an, dass jedes Molekül ein Volumen $b > 0$ einnimmt und daher die Ortsintegration auf ein Volumen $V' = V - Nb$ reduziert wird. Gehen Sie des Weiteren davon aus, dass die Teilchen kurzreichweitig wechselwirken. Hierbei kann jedem Teilchen eine Wechselwirkung $W = -a\frac{N}{V}$ zugeordnet werden mit einer Konstanten $a > 0$. Daher lautet die Hamiltonfunktion des Van-der-Waals Gases

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - a\frac{N}{V} \right) \text{ mit } \mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)\,.$$

Für die kanonische Zustandssumme Z des Van-der-Waals Gases sollten Sie die Formel

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V - Nb}{\lambda^3} \right)^N e^{N^2 a/(V k_B T)}$$

erhalten. *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie die freie Energie $F(T,V,N)$ für das Van-der-Waals Gas im Grenzfall $N \gg 1$. Sie sollten das Ergebnis

$$F(T,V,N) = -Nk_BT \left[1 + \ln\left(\frac{V - Nb}{N\lambda^3} \right) + \frac{aN}{Vk_BT} \right]$$

erhalten. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie den Druck P für das Van-der-Waals Gas. Sie sollten folgende Formel erhalten

$$P = \frac{k_BTn}{1 - nb} - an^2$$

mit der Teilchendichte $n = N/V$. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die innere Energie pro Teilchen $\epsilon = E/N$ für das Van-der-Waals Gas, wobei die innere Energie E gegeben ist durch E, und begründen Sie, warum die innere Energie pro Teilchen ϵ, im Gegensatz zum idealen Gas, von der Teilchendichte abhängt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *Eigenzustände eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators*

Betrachten Sie den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator (1) äquivalent zu

$$\hat{H} = \left(\hat{n}_x + \hat{n}_y + \hat{\mathbb{1}}\right)\hbar\omega,\ \hat{n}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x,\ \hat{n}_y = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$$

ist. *(2 Punkte)*

b) Drücken Sie den Operator der z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ als Funktion von $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ aus. Sie sollten das Ergebnis

$$\hat{L}_z = i\hbar\left(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y\right)$$

erhalten. Beachten Sie, dass $\left[\hat{a}_x, \hat{a}_y^\dagger\right] = 0$ und $\left[\hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger\right] = 0$ gilt. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ einen gemeinsamen Satz simultaner Eigenvektoren haben. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \left(\hat{n}_d + \hat{n}_g + \hat{\mathbb{1}}\right)\hbar\omega$$

mit

$$\hat{n}_d = \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d,\ \hat{n}_g = \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g,\ \hat{a}_g = \left(\hat{a}_x - i\hat{a}_y\right)/\sqrt{2},\ \hat{a}_d = \left(\hat{a}_x + i\hat{a}_y\right)/\sqrt{2}$$

ausgedrückt werden kann. Schreiben Sie $\hat{L}_z$ in Bezug auf $\hat{n}_d$ und $\hat{n}_g$. Sie sollten das Ergebnis

$$\hat{L}_z = \hbar\left(\hat{n}_g - \hat{n}_d\right)$$

erhalten. *(4 Punkte)*

e) Die Quantenzahlen des Systems werden so gewählt, dass die Eigenwerte von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ die Form $(n+1)\hbar\omega$ und $\hbar m$ annehmen. Die gleichzeitig Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ können durch $|n_d, n_g\rangle$ ausgedrückt werden. Was sind n_d und n_g in Bezug auf n und m? Bestimmen die Quantenzahlen n den Zustand des Systems vollständig? Können n und m den Zustand vollständig bestimmen? *(2 Punkte)*

f) Der n-te Eigenzustand von $\hat{H}$ ist $n+1$-fach entartet. Wenn die Energie des Systems $(n+1)\hbar\omega$ ist, was sind dann die möglichen Werte für (n_d, n_g)? Was sind die möglichen Werte von m? *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Sphärisches Potential*

Ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential befindet sich in einem gemeinsamen Eigenzustand von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit Eigenwerten $\hbar^2 l(l+1)$ bzw. $\hbar m$. Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte bezüglich des Zustandes $|l, m\rangle$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

a) $\left\langle \hat{L}_x \right\rangle = \left\langle \hat{L}_y \right\rangle = 0$ *(2 Punkte)*

b) $\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle = \left\langle \hat{L}_y^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2}{2}$
Interpretieren Sie dieses Ergebnis mit Hilfe von $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. *(3 Punkte)*

c) $\left\langle \hat{L}_x \hat{L}_y \right\rangle = \frac{1}{2} i\hbar^2 m$ *(2 Punkte)*

Die Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ in Ortsdarstellung sind die sogenannten Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$.
Hinweis: Nutzen Sie die Auf- und Absteigeoperatoren für den Drehimpuls

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \ .$$

Die Wirkung dieser Operatoren auf die Eigenzustände von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ lautet

$$\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \hbar \left(l(l+1) - m(m \pm 1) \right)^{1/2} |l, m \pm 1\rangle \ .$$

Aufgabe 4 *Kommutatoren und hermitesche Operatoren*

a) Betrachten Sie ein eindimensionales Problem, wobei das System ein Teilchen mit Masse m in einem Potential $\hat{V}(\hat{x})$ ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}) \ .$$

Bestimmen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{H}, \hat{x}\right]$, $\left[\hat{H}, \hat{p}\right]$ und $\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{y}\right]$. *(3 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ hermitesch ist, wobei $m \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U} = e^{-i\hat{K}t/\hbar}$ unitär ist, wobei $t \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 5 *Deltapotential*

In dieser Aufgabe sollen Sie das folgende eindimensionale Problem behandeln: Betrachten Sie ein Teilchen mit der Masse m, welches von links auf ein Deltapotential $V(x) = |V_0|\delta(x)$ trifft. Untersuchen Sie nun die stationäre Lösung des Teilchens für die Energien $0 < E < |V_0|$ des Teilchens. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

a) Bestimmen Sie die stationären Eigenfunktionen des Teilchens mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung ohne explizit die Koeffizienten, die über die Randbedingungen im System bestimmt werden, zu berechnen. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Randbedingungen im System zwei Gleichungen für die in den Eigenfunktionen auftauchenden Koeffizienten. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie nun die Koeffizienten in den stationären Eigenfunktionen des Teilchens. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie den Reflektionskoeffizient und den Transmissionskoeffizient. *(2 Punkte)*

e) Erläutern Sie kurz in einem Satz oder mit einer kurzen Rechnung das klassische Verhalten des Teilchens in diesem Potential. *(1 Punkt)*