# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

**SoSe 2019** **Blatt 10** **14.06.2019**

**Dr. Schank**
mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

**Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 21.06.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen**

## Aufgabe 30 *Laguerrepolynome*

In kugelsymmetrischen Systemen können die Energieeigenzustände durch die Produktform $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$ ausgedrückt werden. Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie bereits den Winkelteil $Y(\theta, \phi)$ der Wellenfunktionen, die Kugelflächenfunktionen, untersucht. In dieser Aufgabe sollen Sie nun den Radialanteil $R(r)$ untersuchen. Der Radialanteil wird im wesentlichen bestimmt durch die sogenannten zugeordneten Laguerrepolynome $L_j^k(x)$. Diese zugeordneten Laguerrepolynome können mit Hilfe der Laguerrepolynome berechnet werden

$$L_j^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{k+j}(x) \ , \tag{1}$$

wobei $k, j \in \mathbb{N}_0$. Die Laguerrepolynome $L_{j+k}(x)$ können aus der Rodrigues-Formel (für Laguerrepolynome)

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right) \ , \tag{2}$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$, entwickelt werden.

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $L_n(x)$, gegeben durch Gl. (2), die Laguerregleichung

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1-x) \frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0 \tag{3}$$

erfüllen.
**Hinweis:** Durch die Ableitung von $g_n = e^{-x} x^n$ kann gezeigt werden, dass

$$x \frac{dg_n}{dx} = (n-x) g_n \tag{4}$$

gilt. Leiten Sie Gleichung (4) $n+1$ mal ab und seien Sie dabei vorsichtig bei der Verwendung der Produktregel. Mit der Substitution $L_n = e^x \frac{d^n g_n}{dx^n}$ in Gleichung (3) können die Ausdrücke umgeordnet werden, um die Äquivalenz der beiden Gleichungen zu zeigen. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die zugeordneten Laguerrepolynome die Laguerregleichung

$$x \frac{d^2 L_j^k(x)}{dx^2} + (1-x+k) \frac{dL_j^k(x)}{dx} + jL_j^k(x) = 0 \tag{5}$$

erfüllen. Auch für $j \in \mathbb{R}$ können die zugeordneten Laguerrepolynome $L_j^k(x)$ definiert werden, die ebenfalls die Laguerregleichung (5) erfüllen.
**Hinweis:** Betrachten Sie Gl. (3) mit $n \to k+j$ und leiten Sie $k$-mal ab. *(2 Punkte)*

## **Aufgabe 31** *Jacobi-Determinante*

Im Folgenden wird der Formalismus der Jacobi-Determinante eingeführt, der für den Umgang mit Zustandsvariablen sehr nützlich sein kann.
Es seien zwei Funktionen $f, g$ von zwei Variablen $x, y$ gegeben. Wenn man $(f, g)$ als die beiden Komponenten einer vektorwertigen Funktion $F$ von $x, y$ auffasst, dann ist

$$DF = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \end{bmatrix}$$

die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) dieser Funktion $F$. Die sogenannte Jacobi-Determinante lautet

$$\frac{\partial (f, g)}{\partial (x, y)} = \det \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass man die partielle Ableitung mit Hilfe der Jacobi-Determinante als

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial (f, y)}{\partial (x, y)}$$

schreiben kann. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Determinante ihr Vorzeichen wechselt beim Vertauschen zweier Spalten:

$$\frac{\partial (f, g)}{\partial (x, y)} = -\frac{\partial (g, f)}{\partial (x, y)} = -\frac{\partial (f, g)}{\partial (y, x)} = \frac{\partial (g, f)}{\partial (y, x)}$$

*(1 Punkt)*

c) Hängen nun $x$ und $y$ von weiteren unabhängigen Variablen $u$ und $v$ ab, so gilt

$$\frac{\partial (f, g)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (f, g)}{\partial (u, v)} \cdot \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \quad . \tag{6}$$

Zeigen Sie die Kettenregel (6). *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial f}\right)_v} \quad .$$

*(1 Punkt)*

e) Wir betrachten drei Variablen, die eine Bedingung $F(x, y, z) = 0$ erfüllen. Dann hängt $x$ von $y$ und $z$ ab, $x(y, z)$, und Funktionen dieser Variablen hängen nur von zwei der Variablen ab, z.B. $w(x, y)$. Zeigen Sie die Gültigket der Relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad .$$

*(2 Punkte)*

f) Die Größen $x, y, z$ erfüllen die Gleichung $F(x, y, z) = 0$. Es sei $w$ eine weitere Funktion von irgend zweier dieser Größen. Zeigen Sie die Relationen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \ .$$

*(1 Punkt)*

## Aufgabe 32 *Phasenraumvolumen*

Das Volumen der $n$-dimensionalen Kugel mit dem Radius $R$ lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 ... \int dx_n}_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2}$$

bestimmen, wobei $dV_n$ das $n$-dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten bezeichnet und $R$ den Radius der n-dimensionalen Kugel darstellt.

a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1) R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel ist. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil (a) das Volumenelement $dV_n$ in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie kann aus $dV_n$ das Volumen $V_n$ berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der von $R$ unabhängige Anteil? *(1 Punkt)*

c) Um nun konkret $V_n(1)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-\left(x_1^2 + ... x_n^2\right)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ mithilfe der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt \ e^{-t} t^{x-1}$ aus. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der $n$-dimensionalen Kugel

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

gilt, wobei $n/2 \Gamma(n/2) = \Gamma(n/2 + 1)$ ist. *(1 Punkt)*

e) Betrachten Sie ein Ensemble aus $N$ klassischen, unterscheidbaren, nicht wechselwirkenden, eindimensionalen harmonischen Oszillatoren mit einer Frequenz $\omega$. Berechnen Sie das Phasenraumvolumen für dieses System bei einer Energie von $E$ im mikrokanonischen Ensemble. *(2 Punkte)*