Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2019 **Blatt 11** **21.06.2019**

Dr. Schank
mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 28.06.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 33 *Virialentwicklung*

Die thermische Zustandsgleichung für ein reales Gas kann in der Dichte $n = N/V$ entwickelt werden:

$$pV = Nk_BT\left[1 + A_2(T)\frac{N}{V} + A_3(T)\left(\frac{N}{V}\right)^2 + ...\right], \tag{1}$$

wobei p den Druck, V das Volumen, N die Teilchenanzahl und T die Temperatur des Systems angibt. Diese Entwicklung wird Virialentwicklung genannt.

a) Berechnen Sie die Virialkoeffizienten $A_i(T)$ für das Van-der-Waals Gas, dessen thermische Zustandsgleichung

$$\left(p + n^2a\right)(1 - nb) = nk_BT \tag{2}$$

lautet. Berechnen Sie zudem die Boyle-Temperatur T_B, die über $A_2(T_B) = 0$ definiert ist. *(2 Punkte)*

b) Die kritische Temperatur T_c, der kritische Druck p_c und das kritische Volumen V_c sind über

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=T_c} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=T_c} = 0 \tag{3}$$

definiert. Zeichnen Sie den Druck p als Funktion von dem Volumen V für eine Temperatur T für die Fälle $T \gg T_c$, $T = T_c$ und $T \ll T_c$. Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c, den kritischen Druck p_c und das kritische Volumen V_c für das Van-der-Waals Gas. Zeigen Sie zudem, dass T_c, p_c und V_c des Van-der-Waals Gases die universelle Beziehung

$$Nk_B\frac{T_c}{p_cV_c} = \frac{8}{3}$$

erfüllt. *(2 Punkte)*

c) Benutzen Sie die reskalierten Variablen $p' = p/p_c$, $T' = T/T_c$ und $V' = V/V_c$, um die thermische Zustandsgleichung des Van-der-Waals Gases ohne explizites Auftreten der Parameter a und b zu schreiben. *(2 Punkte)*

Aufgabe 34 *Gammafunktion und Stirling-Formel*

Die allgemeine Definition der Gammafunktion für $x \geq 1$ lautet

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy\ y^{x-1} e^{-y} \quad .$$

a) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\Gamma(n+1) = n! \quad .$$

(1 Punkt)

b) Leiten Sie die Stirling-Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad , \quad \text{für } n \gg 1$$

als Näherung der Fakultät für große Zahlen n her. Verwenden Sie hierbei die Gamma Funktion aus a) und substituieren Sie $y = x \cdot n$. Approximieren Sie das verbleibende Integral mithilfe der Sattelpunktsnäherung

$$\int_a^b dx\ e^{nf(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}} e^{nf(x_0)}, \text{ für } n \gg 1 \ ,$$

für f zweimal stetig differenzierbar, beliebige Endpunkte $a < b$, und x_0 das globale Maximum von f. *(1 Punkt)*