# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

**SoSe 2019** **Blatt 3** **26.04.2019**

**Dr. Schank**
mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

**Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 03.05.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen**

## Aufgabe 7 *Hermitesche Operatoren*

Erfüllt ein linearer Operator $\hat{A}$ die Relation

$$\left\langle u \middle| \hat{A}u \right\rangle = \left\langle \hat{A}u \middle| u \right\rangle \ , \tag{1}$$

so wird er hermitescher Operator genannt. Das Skalarprodukt ist dabei über

$$\left\langle u \middle| \hat{A}u \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x) A(x) u(x) dx \tag{2}$$

definiert und $u(x)$ stellt in Gl. (1) eine beliebige Funktion dar.
Zeigen Sie, dass die Relation (1) die Relation

$$\left\langle f \middle| \hat{A}g \right\rangle = \left\langle \hat{A}f \middle| g \right\rangle \tag{3}$$

impliziert, wobei $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen darstellen.

*Hinweis:* Wenden Sie die Funktionen (i) $u(x) = f(x) + g(x)$ und (ii) $u(x) = f(x) + ig(x)$ auf die Relation (1) an, wobei $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen darstellen. *(3 Punkte)*

## Aufgabe 8 *Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf: Teil 2*

In Aufgabe 5 wurde ein Teilchen betrachtet, welches zwischen zwei undurchdringlichen Wänden gefangen ist. Im Folgenden werden die Ergebnisse und Notationen der Aufgabe 5 genutzt, um das System weiter zu untersuchen. Die normierten Eigenfunktionen eines Teilchens in dem Potential aus Aufgabe 5 können als

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \text{ mit } n = 1, 2, 3, ... \tag{4}$$

geschrieben werden, wobei $x$ die Ortsvariable, $n$ die Quantenzahl und $L$ die Breite des Potentialtopfes angibt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte ein Teilchen am Ort $x$ im Potentialtopf anzutreffen. Zeichnen Sie für die ersten drei Quantenzahlen $n$ diese Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion vom Ort $x$. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie explizit die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ mit Hilfe der Teilaufgabe a). *(2 Punkte)*

c) Berechnen sie nun die Erwartungswerte $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$. Bestimmen Sie aus den Erwartungswerten aus Teilaufgabe b) und c) die Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p$, wobei $\Delta x$ und $\Delta p$ die Standardabweichungen der Wahrscheinlichkeitsdichten im Ort-und Impulsraum darstellen. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die zeitabhängigen Eigenfunktionen $\psi_n(x,t)$. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsstromdichte $j$ für jede Quantenzahl $n$. *(2 Punkte)*

## Aufgabe 9 *Ehrenfest Theorem*

a) Ein Teilchen der Masse $m$ befindet sich in einem 3-dimensionalen Potential $V(\mathbf{r})$. Beweisen Sie die Relation

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = -\left\langle \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \right\rangle \tag{5}$$

zwischen dem Erwartungswert des Impulses des Teilchens und dem Erwartungswert der Ableitung des Potentials. Diese Relation wird auch das Ehrenfest Theorem für den Impuls genannt. In Gl. (5) ist $\hat{\mathbf{p}}$ der Impulsoperator und sein Erwartungswert im Ortsraum ist definiert über

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r},t) \left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right) \psi(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r},t) \mathbf{p}_{op} \psi(\mathbf{r},t) \ . \tag{6}$$

Der zweite Erwartungswert in Gl. (5) entspricht ebenfalls dem Erwartungswert im Ortsraum und lautet

$$\left\langle \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \right\rangle = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r},t) \left(\nabla V(\mathbf{r})\right) \psi(\mathbf{r},t) \ , \tag{7}$$

wobei $\psi(\mathbf{r},t)$ die Wellenfunktion des Teilchens darstellt. *(4 Punkte)*

b) Im Allgemeinen ist die Identität

$$\left\langle \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}} \right\rangle = \nabla V(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle} \tag{8}$$

nicht korrekt. Zeigen Sie, dass die Relation (8) für ein harmonisches Potential $V(x) = \lambda x^2$ erfüllt ist. *(2 Punkte)*