Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2019 **Blatt 5** **10.05.2019**

Dr. Schank
mit Tom Schmitt, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 17.05.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 13 *Operatoren*

In der Vorlesung wurde bereits der inverse, der adjungierte, der transponierte und der konjugierte Operator zu einem Operator definiert. Im Folgenden sollen Sie Relation beweisen, die beim Umgang mit diesen Operatoren hilfreich sind.

a) Zeigen Sie die Relation $(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$, wobei $\hat{A}^{-1}$ ($\hat{B}^{-1}$) der inverse Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) ist. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{A}^*\hat{B}^*$, wobei $\hat{A}^*$ ($\hat{B}^*$) den komplex konjugierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^T = \hat{B}^T\hat{A}^T$, wobei $\hat{A}^T$ ($\hat{B}^T$) den transponierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie die Relation $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$, wobei $\hat{A}^\dagger$ ($\hat{B}^\dagger$) den adjungierten Operator zum Operator $\hat{A}$ ($\hat{B}$) darstellt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 14 *Ort-und Impulsoperator*

Im Ortsraum besteht die Wirkung des Ortsoperators auf eine quadratisch integrierbare Funktion $\psi(\mathbf{r})$ in einer Multiplikation mit dem Vektor $\mathbf{r}$. Die Wirkung des Impulsoperators ist durch Anwendung des Gradientens auf diese Funktion gegeben. Damit sind, wie bereits in der Vorlesung definiert, die Operatoren im Ortsraum durch $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{r}$ und $\mathbf{p}_{op} = -i\hbar\nabla_\mathbf{r}$ gegeben. Bestimmen Sie

a) den transponierten Operator $\mathbf{r}_{op}^T$ zum Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ im Ortsraum. *(1 Punkt)*

b) den transponierten Operator $\mathbf{p}_{op}^T$ zum Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. *(2 Punkte)*

c) den komplex konjugierten Operator sowohl für den Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ als auch für den Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. *(1 Punkt)*

d) den adjungierten Operator sowohl für den Ortsoperator $\mathbf{r}_{op}$ als auch für den Impulsoperator $\mathbf{p}_{op}$ im Ortsraum. Sind die beiden Operatoren hermitesch? *(1 Punkt)*

Aufgabe 15 *Harmonischer Oszillator*

Im Folgenden betrachten wir einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit der Masse m und dem Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Die Wellenfunktion

$$\psi_0 = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{1}$$

beschreibt den Grundzustand des harmonischen Oszillators. Höher angeregte Zustände sind gegeben durch

$$\psi_n = N_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\psi_0 \ , \tag{2}$$

mit $N_n = (2^n n!)^{-1/2}$ und $H_n(x)$ dem Hermiteschen Polynom von Grad n. Für $H_n(x)$ gilt:

1. $H_0(x) = 1$
2. $H_1(x) = 2x$
3. $H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$, für $n \in \mathbb{N}$
4. $\frac{\partial}{\partial x}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$
5. $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion ψ_0 die stationäre Schrödingergleichung für den Oszillator löst und bestimmen Sie die Normalisierungskonstante A. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen ψ_n und die Wahrscheinlichkeitsdichten $|\psi_n|^2$ für den Grundzustand und die ersten drei angeregten Zustände. Diskutieren Sie die Symmetrien der Zustandsfunktionen ψ_n und die Ortserwartungswerte $\langle x \rangle_n$ zu den jeweiligen Zuständen. *(3 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die angeregten Zustände ψ_n die Schrödingergleichung erfüllen und bestimmen Sie die Energien E_n der Zustände.

1. Hinweis: Eine Transformation von $x \to \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\tilde{x}$ kann die Rechnung vereinfachen.

2. Hinweis: Bestimmen Sie vorerst die zweite Ableitung von $H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Nutzen Sie dazu die Eigenschaft 4. *(3 Punkte)*