Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2019 **Blatt 6** **17.05.2019**

Dr. Schank
mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 24.05.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 16 *Kommutatorrelationen*

Mit

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

definiert man den Kommutator der beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Kommutators

a) $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=-\left[\hat{B},\hat{A}\right]$ *(1 Punkt)*

b) $\left[\hat{A},\left(\hat{B}+\hat{C}\right)\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]$ *(1 Punkt)*

c) $\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]$ *(1 Punkt)*

d) $\left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right]+\left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right]+\left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=0$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 17 *Drehimpulsoperator*

Der Drehimpulsoperator ist definiert als das Kreuzprodukt zwischen dem Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ und dem Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}$: $\hat{\mathbf{L}}=\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{p}}$.

a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator hermitesch ist, d.h. $\hat{\mathbf{L}}^\dagger=\hat{\mathbf{L}}$.
Hinweis: Benutzen Sie dabei den Levi-Civita Tensor. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_x,\hat{x}\right]$, $\left[\hat{L}_x,\hat{y}\right]$ und $\left[\hat{L}_x,\hat{z}\right]$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_x,\hat{p}_x\right]$, $\left[\hat{L}_x,\hat{p}_y\right]$ und $\left[\hat{L}_x,\hat{p}_z\right]$. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]$. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{\mathbf{L}}_i,\hat{\mathbf{r}}_j\right]$, wobei $i,j=x,y,z$. *(2 Punkte)*

f) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{\mathbf{L}}_i,\hat{\mathbf{p}}_j\right]$, wobei $i,j=x,y,z$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 18 *Projektionsoperator*

Ein Projektionsoperator $\hat{P}$ wird über die Relation $\hat{P}^2 = \hat{P}$ definiert, d.h. die zweifache Projektion auf einen Vektor ist gleichwertig zur einfachen Projektion auf diesen Vektor.

a) Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte p des Projektionsoperators $\hat{P}$ mit Hilfe der Eigenwertgleichung $\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$, wobei $|p\rangle$ den entsprechenden Eigenvektor darstellt. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{\mathbb{1}} - \hat{P}$ ebenfalls einen Projektionsoperator darstellt. Wie hängen die Eigenvektoren von $\hat{\mathbb{1}} - \hat{P}$ mit den Eigenvektoren von $\hat{P}$ zusammen? *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $\hat{P}^\dagger$ zum Projektionsoperator $\hat{P}$ einen Projektionsoperator darstellt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 19 *Operatorfunktion*

In dieser Aufgabe sollen Sie Relationen zeigen, die beim Umgang mit Operatorfunktionen nützlich sind. Wir betrachten dabei eine Funktion f einer Variablen z, die in einem bestimmten Bereich in eine Potenzreihe von z entwickelt werden kann:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \ .$$

Nach Definition ist die zugehörige, vom Operator $\hat{A}$ abhängende Operatorfunktion $f(\hat{A})$ durch die Reihe

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{A}^n$$

mit den selben Koeffizienten f_n gegeben.

a) Zeigen Sie die Relation

$$\hat{A}^{-1}\hat{B}^2\hat{A} = \left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right)^2 \ .$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie die Relation

$$\hat{A}^{-1}\hat{B}^n\hat{A} = \left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right)^n$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie die Relation

$$\hat{A}^{-1}f(\hat{B})\hat{A} = f\left(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\right) \ .$$

(1 Punkt)

d) Zeigen Sie die Kommutatorrelation

$$\left[f(\hat{A}), \hat{B}\right] = f'(x)|_{x=\hat{A}} \ ,$$

wobei $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \mathbb{1}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\hat{A}^{n-1}$. *(2 Punkte)*