Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2019 **Blatt 7** **24.05.2019**

Dr. Schank
mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 31.05.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 20 *Operatorfunktion: Exponentialfunktion*

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die Operatorfunktion $e^{\hat{A}}$ der Exponentialfunktion.

a) Der Operator $\hat{A}$ sei nun ein linearer Operator und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen sie das Potenzgesetz

$$e^{a\hat{A}}e^{b\hat{A}} = e^{(a+b)\hat{A}}$$

für die hier betrachtete Operatorfunktion. *(2 Punkte)*

b) Ein Operator $\hat{U}$ heißt nach Definition ein unitärer Operator, wenn sein Inverses $\hat{U}^{-1}$ gleich seinem Adjungierten $\hat{U}^\dagger$ ist:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1} \ .$$

Zeigen Sie nun, dass der Operator $\hat{T} = e^{ia\hat{A}}$ unitär ist, wobei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator ist und $a \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 21 *Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators*

Die Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators werden im Wesentlichen durch die sogenannten Hermitepolynome

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

bestimmt. Im Folgenden sollen Sie einige dieser Eigenfunktionen bestimmen und Eigenschaften der Hermitepolynome zeigen.

a) Berechnen Sie ausgehend von der Differentialgleichung $\hat{a}|0\rangle = 0$ explizit den normierten Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators im Ortsraum. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die ersten beiden angeregten Zustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators durch sukzessive Anwendung des Aufsteigeoperators $\hat{a}^\dagger$ im Ortsraum. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z-\lambda) = e^{-\lambda^2+2\lambda z}$ die erzeugende Funktion der Hermitepolynome ist, d.h.

$$e^{-\lambda^2+2\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z) \ . \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(z-\lambda)$. *(2 Punkte)*

d) Leiten Sie die Rekursionsbeziehung

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, ... \tag{2}$$

her.
Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach λ. *(2 Punkte)*

e) Zeigen Sie die Rekursionsbeziehung

$$H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, ... \tag{3}$$

Leiten Sie danach die folgende Differentialgleichung her:

$$H_n''(z) - 2zH_n'(z) + 2nH_n(z) = 0, \quad n = 1, 2, .. \tag{4}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung der Ableitung von $f(z-\lambda)$ nach z. *(2 Punkte)*

f) Beweisen Sie durch Induktion, dass $H_n(z)$ ein Polynom n-ter Ordnung ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 22 *Der eindimensionale harmonische Oszillator*

In der Vorlesung wurde bereits die Eigenbasis $\{|n\rangle | n = 0, 1, 2, ...\}$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators eingeführt. Im Folgenden sollen Sie die Matrixelemente einiger Operator in der $\{|n\rangle\}$-Darstellung bestimmen.

a) Bestimmen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{a}|m\rangle$ und $\langle n|\hat{a}^\dagger|m\rangle$, wobei $\hat{a}$ der Absteigeoperator und $\hat{a}^\dagger$ der Aufsteigeoperator ist. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{p}|m\rangle$ und $\langle n|\hat{x}|m\rangle$, wobei $\hat{p}$ den Impulsoperator und $\hat{x}$ den Ortsoperator darstellt. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{E}_{kin}|m\rangle$ und $\langle n|\hat{E}_{pot}|m\rangle$, wobei $\hat{E}_{kin}$ den Operator der kinetischen Energie darstellt und $\hat{E}_{pot}$ den Operator der potentiellen Energie darstellt. *(2 Punkte)*