Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2019 **Blatt 8** **31.05.2019**

Dr. Schank
mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 07.06.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 23 *Ableitung von Operatoren und Operatorfunktionen*

Sei $\hat{A}(c)$ ein Operator, der von einer beliebigen Variablen c abhängt. Wie bei gewöhnlichen Funktionen definiert man die Ableitung von $\hat{A}(c)$ durch den Grenzwert (falls er existiert)

$$\frac{d\hat{A}(c)}{dc} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\hat{A}(c+\epsilon) - \hat{A}(c)}{\epsilon} \; .$$

In dieser Aufgabe sollen einige Relationen gezeigt werden, die bei Ableitungen von Operatorfunktionen nützlich sind.

a) Zeigen Sie die Produktregel

$$\frac{d(\hat{A}\hat{B})}{dc} = \hat{A}\frac{d\hat{B}}{dc} + \frac{d\hat{A}}{dc}\hat{B}$$

für Operatoren, wobei die beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kontinuierlich von der Variablen c abhängen. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{d\hat{A}^{-1}(c)}{dc} = -\hat{A}^{-1}(c)\frac{d\hat{A}(c)}{dc}\hat{A}^{-1}(c)$$

gilt. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass

$$\frac{de^{a\hat{A}}}{da} = \hat{A}e^{a\hat{A}}$$

gilt, wenn der Operator $\hat{A}$ unabhängig von der Variablen a ist. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{da}\left(e^{a\hat{A}}\hat{B}e^{-a\hat{A}}\right) = e^{a\hat{A}}\left[\hat{A},\hat{B}\right]e^{-a\hat{A}}$$

gilt, wenn die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ unabhängig von der Variablen a sind. *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie die Relation

$$\frac{d}{da}\left(e^{a\hat{A}}e^{a\hat{B}}\right) = e^{a\hat{A}}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)e^{a\hat{B}} \; ,$$

wobei die Operatoren unabhängig von der Variablen a sind. *(1 Punkt)*

Aufgabe 24 *Schrödinger- und Heisenberg-Bild*

a) Bestimmen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle\psi(t)|\hat{a}|\psi(t)\rangle$ des Absteigeoperators und den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle\psi(t)|\hat{a}^\dagger|\psi(t)\rangle$ des Aufsteigeoperators im Schrödinger-Bild, wobei $|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}|n\rangle$ mit den Eigenenergien E_n und den Eigenzuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators und $C_n \in \mathbb{C}$. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die zeitabhängigen Operatoren $\hat{a}_H$ und $\hat{a}_H^\dagger$ im Heisenberg-Bild. *(1 Punkt)*

c) Verifizieren Sie mit den hier erhaltenen Ergebnissen das Ehrenfest-Theorem für den Ortsoperator $\hat{x}$ und den Impulsoperator $\hat{p}$:

$$m\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = -\left\langle \frac{d}{dx}V(x)\bigg|_{x=\hat{x}}\right\rangle \tag{2}$$

Dabei wird der Erwartungswert bezüglich des Zustandes $|\psi(t)\rangle$ genommen. Das Potential $V(x)$ stellt das Potential des harmonischen Oszillators dar. *(2 Punkte)*

Aufgabe 25 *Dichteoperator*

Um den Erwartungswert einer Observable $\hat{X}$ mit Hilfe des im Folgenden definierten Dichteoperators $\hat{\rho}$ zu berechnen, benötigen Sie die Spur (Sp) eines Operators $\hat{Y}$. Die Spur eines Operators $\hat{Y}$ ist definiert als

$$Sp(\hat{Y}) = \sum_n \langle n|\hat{Y}|n\rangle \ , \tag{3}$$

wobei $\{|n\rangle\}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem ist.

a) Ein System sei im Zustand $|\psi\rangle$, mit $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Der Erwartungswert einer Observablen $\hat{X}$ hat den Mittelwert $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \left\langle \psi|\hat{X}|\psi \right\rangle$. Man definiert den **Dichteoperator eines reinen Zustandes** als

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \ . \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass

1. $\left\langle \hat{X} \right\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{X})$ *(1 Punkt)*
2. $Sp(\hat{\rho}) = 1, \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ *(1 Punkt)*
3. $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ *(1 Punkt)*

b) **Im Allgemeinen ist der Dichteoperator** definiert als

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \ , \tag{5}$$

wobei $|\psi_i\rangle$ einen normierten Zustand darstellt und $p_i \in \{x|x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ mit $\sum_i p_i = 1$. Daher ist der Dichteoperator aus a) nur ein Spezialfall mit einem p_i gleich eins und den restlichen p_i gleich Null. Auch im allgemeinen Fall ist der Erwartungswert einer Observablen $\hat{X}$ durch $\left\langle \hat{X} \right\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{X})$ gegeben. Zeigen Sie für den allgemeinen Dichteoperator, dass

1. $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{X}|\psi_i\rangle$ *(1 Punkt)*
2. $Sp(\hat{\rho}) = 1, \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ *(1 Punkt)*
3. $Sp(\hat{\rho}^2) < 1$, falls $p_i \neq 0$ für mehr als ein i. *(1 Punkt)*

Aufgabe 26 *Drehimpulsoperator: Teil 2*

Der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ wurde bereits in der Aufgabe 17 definiert. Wir definieren nun die sogenannten Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{L}}^2$ mit den Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{L}_i$, wobei $i = x, y, z$, kommutiert. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right]$, $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_+\right]$, $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_-\right]$, $\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_-\right]$ und $\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_+\right]$ *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie die Relationen $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$. *(2 Punkte)*