Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 10** **24.06.2022**

Aufgabe 30 *1D harmonische Oszillatoren*

Für ein Teilchen der Masse m in einer Dimension sei $\hat{x}$ der Ortsoperator und $\hat{p}$ der Impulsoperator, welche die Kommutationsbeziehung $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{\mathbb{1}}$ erfüllen. $\mathcal{E}$ ist der Vektorraum der Zustände $|\psi\rangle$, also $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$ und $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Der Hamiltonian ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \text{ mit } \omega \in \mathbb{R}.$$

a) Verwenden Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\hat{x}}{l} + i\frac{\hat{p}}{(\hbar/l)})$ und $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\hat{x}}{l} - i\frac{\hat{p}}{(\hbar/l)})$, wobei $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Zeigen Sie, dass $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$ und dass $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hat{\mathbb{1}}}{2})$. *(0.5 Punkte)*

b) Sei $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, dann zeige $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ und $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$. *(0.5 Punkte)*

c) Seien $|n\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{N}$ und $\hat{H}$, sodass $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie, dass, wenn der Grundzustand $|0\rangle$ nicht entartet ist, dann auch all die anderen Zustände $|n\rangle$ nicht entartet sind. *(1 Punkt)*

d) Betrachten wir nun einen generischen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$. Sei $\{|n\rangle\}$ eine Basis in $\mathcal{E}$, dann kann jeder Zustandsvektor geschrieben werden als $|\psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ wobei $\sum_n |c_n|^2 = 1$, und $c_n = \langle n|\psi\rangle$. Bestimmen Sie die Erwartungswerte von

$$\begin{aligned} \langle\hat{x}\rangle &= \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle, \quad \langle\hat{x}^2\rangle = \langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle, \\ \langle\hat{p}\rangle &= \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle, \quad \langle\hat{p}^2\rangle = \langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle, \end{aligned}$$

für den Fall $c_n = \delta_{n,p}$, wobei $p \in \mathbb{N}$.

Anmerkung:

$$\begin{aligned} a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \text{ for } n > 0 \\ a|0\rangle &= 0 \end{aligned}$$

(2 Punkte)

e) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von $\langle\hat{x}\rangle, \langle\hat{x}^2\rangle, \langle\hat{p}\rangle, \langle\hat{p}^2\rangle$ wenn $c_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$. *(2 Punkte)*

f) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle_t = \sum_n e^{-in\omega t}c_n|n\rangle e^{-\frac{i\omega t}{2}}$. Welche Bedingungen müssen für die c_n gelten, damit es eine Periode T gibt, sodass $|\psi\rangle_t = |\psi\rangle_{t+T}$? *(2 Punkte)*