Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 11** **30.06.2022**

Aufgabe 31 *Kohärente Zustände*

Gegeben sei der kohärente Zustand

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,, \tag{1}$$

der $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ erüllt. Hierbei seien $|n\rangle$ die Fockzustände.

a) Bestimmen Sie die Ortsdarstellung von $|\alpha\rangle$:

$$\psi_{\text{coh}}(x) = \langle x|\alpha\rangle \,. \tag{2}$$

Hinweis: Sie können die Erzeugendefunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi) = \exp\left(-z^2 + 2\xi z\right) \tag{3}$$

benutzen, wobei z eine komplexe Variable ist und $H_n(\xi)$ die Hermitepolynome darstellen. Alternativ können Sie $\langle x|\, \hat{a}\, |\alpha\rangle = \alpha \,\langle x|\alpha\rangle$ mit

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p} \,. \tag{4}$$

benutzen. *(1 Punkt)*

b) $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ seien zwei kohärenten Zustände. Zeigen Sie

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha^*\beta} \,. \tag{5}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 32 *Geladener harm. Oszillator in variablem elektrischem Feld*

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator besteht aus einem Teilchen der Masse m und Ladung q im Potential $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. Wir nehmen an, dass sich das Teilchen in einem zeitabhängigen elektrischen Feld $E(t)$ parallel zur x-Achse befindet, so dass zu $V(\hat{x})$ die potentielle Energie

$$\hat{W}(t) = -qE(t)\hat{x} \tag{6}$$

hinzugefügt werden muss. $|\psi(0)\rangle$ sei der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$.

a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}(t)$ des Teilchens unter Verwendung der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ (Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des harmonischen Oszillators). Berechnen Sie die Kommutatoren von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ mit $\hat{H}(t)$. *(1 Punkt)*

b) Die Zahl $\alpha(t)$ sei durch

$$\alpha(t) = \langle\psi(t)|\,\hat{a}\,|\psi(t)\rangle \tag{7}$$

definiert, wobei $|\psi(t)\rangle$ der normierte Zustand zum Zeitpunkt t ist. Nutzen Sie a) um zu zeigen, dass $\alpha(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) = -\mathrm{i}\omega\alpha(t) + \mathrm{i}\lambda(t) \tag{8}$$

mit

$$\lambda(t) = \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}E(t) \tag{9}$$

genügt und integrieren Sie diese Differentialgleichung. Geben Sie die Erwartungswerte von Ort und Impuls zum Zeitpunkt t an. *(1 Punkt)*

c) Der Ket $|\phi(t)\rangle$ ist durch

$$|\phi(t)\rangle = (\hat{a} - \alpha(t))|\psi(t)\rangle \tag{10}$$

definiert, wobei $\alpha(t)$ in b) bestimmt wurde. Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und b) um zu zeigen, dass die Zeitentwicklung $|\phi(t)\rangle$ durch

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\phi(t)\rangle = (\hat{H}(t) + \hbar\omega)|\phi(t)\rangle \tag{11}$$

gegeben ist. Wie ändert sich die Form von $|\phi(t)\rangle$ mit der Zeit? *(1 Punkt)*

d) Nehmen Sie an dass $|\psi(0)\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{a}$ mit dem Eigenwert $\alpha(0)$ ist. Zeigen Sie dass $|\psi(t)\rangle$ ebenfalls Eigenvektor von $\hat{a}$ ist und berechnen Sie den Eigenwert. Finden Sie den Erwartungswert des ungestörten Hamiltonoperators

$$\hat{H}_0 = \hat{H}(t) - \hat{W}(t) \tag{12}$$

zur Zeit t als Funktion von $\alpha(0)$. Geben Sie die mittleren quadratischen Abweichungen

$$\Delta x = \sqrt{<\hat{x}^2>_t - <\hat{x}>_t^2}, \quad \Delta p = \sqrt{<\hat{p}^2>_t - <\hat{p}>_t^2}, \quad \Delta H_0 = \sqrt{<\hat{H}_0^2>_t - <\hat{H}_0>_t^2} \tag{13}$$

an. Wie ändern sich diese mit der Zeit? *(2 Punkte)*

e) Nehmen Sie an, dass der Oszillator zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand $|\phi_0\rangle$ des harmonischen Oszillators ist. Das elektrische Feld wirke nur zwischen den Zeiten 0 und T und ist danach gleich Null. Wie lautet die Zeitentwicklung der Erwartungswerte $< \hat{x} >_t$ und $< \hat{p} >_t$ für $t > T$? Anwendung: Nehmen Sie an zwischen 0 und T sei das Feld durch $E(t) = E_0 \cos(\omega' t)$ gegeben. Diskutieren Sie beobachteten Phenomene (Resonanz) im Bezug auf $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Wenn für $t > T$ die Energie gemessen wird, welche Ergebnisse sind möglich und wie sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten? *(2 Punkte)*