Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 12** **08.07.2022**

Aufgabe 33 *Teilchen im Potential $V(x)$*

Gegeben seien der Zustandsraum $\mathcal{E}$ und die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$, die $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\hat{\mathbb{1}}$ erfüllen.

a) Zeigen Sie

$$[\hat{x}, f(\hat{p})] = \mathrm{i}\hbar \left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p=\hat{p}} \tag{1}$$

und

$$[\hat{p}, V(\hat{x})] = -\mathrm{i}\hbar \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} \tag{2}$$

wobei $f(p)$ und $V(x)$ analytisch sind für alle Werte von x und p in $\mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

b) Nutzen Sie Gl. (1) und Gl. (2) um die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Potential $V(\hat{x})$ formal zu lösen, wobei dessen Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{3}$$

gegeben ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 34 *Anharmonizität der Schwingung eines polaren Moleküls*

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\,, \tag{4}$$

der durch das anharmonische Potential

$$V(\hat{x}) = \lambda\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\hat{x}^3, \tag{5}$$

gestört ist wobei λ einen reellen, dimensionslosen Parameter darstellt mit $\lambda \ll 1$.

a) Zeigen Sie

$$V(\hat{x}) = \frac{\lambda\hbar\omega}{2^{3/2}}\left[(\hat{a}^\dagger)^3 + \hat{a}^3 + 3\hat{N}\hat{a}^\dagger + 3(\hat{N}+1)\hat{a}\right]\,, \tag{6}$$

wobei $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ den Erzeugungs-, Vernichtungs- und Anzahloperator des harmonischen Oszillators darstellen. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Energien und Eigenzustände des gestörten harmonischen Oszillators bis zur zweiten Ordnung der Störungstheorie im Parameter λ. *(2 Punkte)*

Aufgabe 35 *Zeitentwicklungsoperator und Heisenberg-Bild*

Gegeben seien der Zustandsraum $\mathcal{E}$ und der Hamiltonoperator $\hat{H(t)}$, mit $\hat{H}(t) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Der Zeitentwicklungsoperator kann formal geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\hat{U}(t,t_0) &= \hat{\mathbb{1}} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \hat{H(t')} + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H(t_1)} \hat{H(t_2)} + \\ & \quad \ldots + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H(t_1)} \hat{H(t_2)} \ldots \hat{H}(t_n) + \ldots \qquad (7)\end{aligned}$$

wobei t_0, t zwei Zeitpunkte sind.

a) Überprüfen Sie, dass $\hat{U}(t_0,t_0) = \hat{\mathbb{1}}$ gilt. *(0.5 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator $\hat{H}$ Gleichung (7) sich zu $\hat{U}(t,t_0) = \exp(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t-t_0))$ reduziert. *(0.5 Punkte)*

c) Betrachten wir nun den Operator $\hat{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ und die Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{C}$, die an jeden Eigenwert von $\hat{A}$ analytisch ist. Zeigen Sie, dass wenn $A_H = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}\hat{U}(t,t_0)$ der Operator im Heisenberg-Bild ist, dann ist $[f(\hat{A})]_H = \hat{U}^\dagger(t,t_0) f(\hat{A}) \hat{U}(t,t_0)$ gegeben durch $[f(\hat{A})]_H = f(\hat{A}_H)$. *(1.5 Punkte)*

d) Sei nun explizit der Hamiltonoperator gegeben als $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ im Heisenberg-Bild her und lösen Sie diese formal. Vergleichen Sie die Dynamik der Erwartungswerte über einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle_0 \in \mathcal{E}$ $(|\psi\rangle_{t=0} = |\psi\rangle_0)$ mit der entsprechenden Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen. *(2 Punkte)*