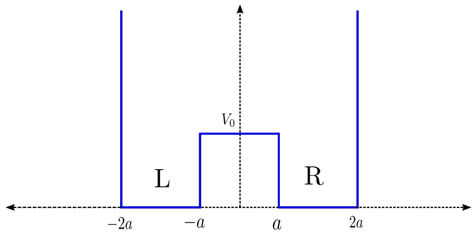
# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik III

**SoSe 2022** **Blatt 13** **15.07.2022**

## Aufgabe 36 *Tunneleffekt und Doppelwandpotenzial*

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens in einem Doppelwandpotenzial $V(x)$, wobei gilt

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \;\; (V_0 > 0) & \text{für } |x| < a, \\ 0 & \text{für } a < |x| < 2a, \\ \infty & \text{für } |x| > 2a, \end{cases}$$




und der Hamiltonian gegeben ist durch $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x})$.

a) Bestimmen Sie für $V_0 \to \infty$ die beiden niedrigsten Eigenenergien $E_0$ und $E_1$ und deren Entartungsgrad. *(2 Punkte)*

b) Betrachten wir nun $V_0$ als endlich, also $V_0 < \infty$. Bestimmen Sie die neuen Eigenzustände und Eigenenergien mit Hilfe der entarteten Störungstheorie im Unterraum $\mathcal{E}_0$ ( $\mathcal{E}_0$ ist der Eigenraum zur Energie $E_0$). Seien $|\psi_L\rangle$ und $|\psi_R\rangle$ der Grundzustand der linken bzw. rechten Quelle für $V_0 \to \infty$. Zeigen Sie, dass für $V_0 < \infty$, der Grundzustand nun $|\psi_+\rangle = (|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle)/\sqrt{2}$ ist und der erste angeregte Zustand $|\psi_-\rangle = (|\psi_L\rangle - |\psi_R\rangle)/\sqrt{2}$ *(2 Punkte)*

c) Vergleichen Sie die Energieaufspaltung $|E_+ - E_-|$ in Bezug auf die Energielücke $|E_1 - E_0|$. Erörtern Sie, wann man die entartete Störungstheorie anwenden kann. *(1 Punkt)*

d) Nehmen wir an, das Teilchen befindet sich zunächst in der Vertiefung L, $|\psi\rangle_0 = |\psi_L\rangle$. Bestimmen Sie die Dynamik unter der Annahme, dass die Zeitentwicklung im Unterraum $\mathcal{E}_0$ beschrieben wird. Zeigen Sie, dass das Teilchen durch den Brunnen tunnelt. Bestimmen Sie die Periode der Schwingung zwischen den Vertiefungen. *(2 Punkte)*

## Aufgabe 37 *Zeitabhängige Störungstheorie*

Betrachten Sie einen Vektorraum $\mathcal{E}$, wobei $\dim(\mathcal{E}) = 2$ und die Basisvektoren $|1\rangle$,$|2\rangle$ erfüllen die Bedingungen $\langle 1|1\rangle = 1 = \langle 2|2\rangle$ and $\langle 1|2\rangle = 0$. Das System wird durch den Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$ beschrieben, wobei

$$\hat{H}_0 = |1\rangle\langle 1|\hbar\omega_1 + |2\rangle\langle 2|\hbar\omega_2, \qquad (\omega_2 > \omega_1)$$

und

$$\hat{V} = V_0\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)\cos(\omega t).$$

Der Zustand des Systems sei $|\psi\rangle_t = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ wobei $c_1(0) = 1$ und $c_2(0) = 0$.

a) Gegeben $b_1 = e^{i\omega_1 t} c_1$, $b_2 = e^{i\omega_2 t} c_2$, verwenden Sie das Wechselwirkungsbild, um die Bewegungsgleichung für $b_1$ und $b_2$ zu schreiben. *(1 Punkt)*

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung in Störungstheorie erster Ordnung. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_2(t) = |c_2(t)|^2$, dass sich das System zum Zeitpunkt $t$ im Zustand $|2\rangle$ befindet. Für welche Zeiten ist die Störungstheorie gültig? *(2 Punkte)*

## Aufgabe 38 *Drehimpuls*

Betrachten Sie ein System mit dem Drehimpuls $l = 1$. Eine Basis des Zustandsraums ist durch die drei Eigenvektoren von $\hat{L}_z$, $|+1\rangle, |0\rangle$ und $|-1\rangle$, gegeben, deren Eigenwerte $+\hbar, 0$ und $-\hbar$ lauten. Sie erfüllen

$$\hat{L}_\pm |m\rangle = \hbar\sqrt{2}|m \pm 1\rangle\,,$$
$$\hat{L}_+|1\rangle = \hat{L}_-|-1\rangle = 0$$

mit $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$. Das System, das ein elektrisches Quadrupolmoment besitzt, befindet sich in einem elektrischen Feldgradienten, sodass der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2)$$

lautet, dabei sind $\hat{L}_u$ und $\hat{L}_v$ die Komponenten von $\hat{\boldsymbol{L}}$ entlang der zwei Richtungen $Ou$ und $Ov$ in der $xOz$-Ebene die jeweils einen Winkel von 45° mit $Ox$ und $Oz$ einschließen. $\omega_0$ ist eine reelle Konstante.

a) Schreiben Sie die Matrix, die $\hat{H}$ in der $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ Basis darstellt. Was sind die stationären Zustände des Systems und wie lauten deren Energien? (Schreiben Sie die Zustände als $|E_1\rangle, |E_2\rangle$ und $|E_3\rangle$ mit absteigenden Energien.) *(2 Punkte)*

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustad

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle)\,.$$

Geben Sie den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit $t$ an. Nehmen Sie an, dass zum Zeitpunkt $t$ die Drehimpulskomponente $\hat{L}_z$ gemessen wird. Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messwerte? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $<\hat{L}_x>_t, <\hat{L}_y>_t$ und $<\hat{L}_z>_t$ zur Zeit $t$. Welche Bewegung beschreibt der Vektor $<\hat{\boldsymbol{L}}>_t$? *(1 Punkt)*

d) Zur Zeit $t$ wir eine Messung von $\hat{L}_z^2$ durchgeführt.

1. Finden Sie heraus, ob Zeiten $t$ existieren, zu denen nur ein einziges Messergebnis möglich ist.
2. Nehmen Sie an die Messung ergab den Messwert $\hbar^2$. Wie lautet der Zustand des Systems unmittelbar nach der Messung? Argumentieren Sie ohne Rechnung wie die weitere Zeitentwicklung aussieht.

*(1 Punkt)*