Übung zur Vorlesung Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 2** **22.04.2022**

Aufgabe 7 *Pauli-Operatoren*

Die Pauli-Operatoren sind durch

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Operatoren mit $j, k, l \in \{x, y, z\}$ die Relationen

$$\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \delta_{j,k}\, \mathbb{1} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \hat{\sigma}_l \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i\, \mathbb{1}$$

erfüllen, wobei letztere für zyklische Vertauschung der Indizes erhalten bleibt. *(2 Punkte)*

b) Beweisen Sie, dass die Operatoren $\hat{\sigma}_j$ und $\hat{S}_j = \hat{\sigma}_j/2$, $j = x, y, z$, den Antikommutator- und Kommutatorrelationen

$$\{\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\} = 2\, \delta_{j,k}\, \mathbb{1} \quad \text{und} \quad [\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i \sum_l \epsilon_{jkl} \hat{S}_l \ .$$

genügen. Hierbei sind der Kommutator und Antikommutator zweier Operatoren A und B durch $[A, B] = AB - BA$ und $\{A, B\} = AB + BA$ gegeben. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass für den Paulivektor $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^\top$ und zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a})(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\, \hat{\vec{\sigma}} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \ .$$

Nutzen Sie diese Eigenschaft um für einen normierten Vektor $\vec{n}$

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n})^2 = 1$$

zu zeigen. *(2 Punkte)*

Aufgabe 8 *Nicht hermitesche Operatoren*

a) Sie wissen, dass zwei Eigenkets $|a_1\rangle$ und $|a_2\rangle$ eines hermiteschen Operators $\hat{A}$ zu den Eigenwerten $a_1 \neq a_2$ orthogonal sind, also $\langle a_1 | a_2 \rangle = 0$ gilt. Nehmen Sie nun an, dass $\hat{A}$ nicht hermitesch ist und den Eigenket $|a_2\rangle$ zum Eigenwert a_2 und Eigenbra $\langle a_1|$ zum Eigenwert $a_1 \neq a_2$ besitzt, also

$$\hat{A}|a_2\rangle = a_2 |a_2\rangle\, , \quad \langle a_1 | \hat{A} = a_1 \langle a_1 |$$

gilt. Zeigen Sie, dass $\langle a_1 | a_2 \rangle = 0$ immer noch erfüllt ist. *(1 Punkt)*

b) Der Operator $\hat{A}$ sei immer noch nicht hermitesch und habe den Eigenket $|a\rangle$ zum Eigenwert a. Zeigen Sie, dass $\langle a^*|$ ein Eigenbra von $\hat{A}^\dagger$ zum Eigenwert a^* ist. Wie steht $\langle a^*|$ mit $|a\rangle$ in Verbindung? Ist a notwendigerweise reell? *(1 Punkt)*

Aufgabe 9 *Funktionen von Operatoren I*

Sei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator, wobei $\{|a_i\rangle\}$, $i = 1, \ldots, N$, dessen Eigenket zum Eigenwert a_i bezeichnet. Schreiben Sie die folgenden Operatoren in der Bra-Ket Notation:

1. $\hat{\mathbb{1}}\,,\ \hat{A},$
2. $f(\hat{A})\,.$

Hierbei ist $f(x)$ eine analytische Funktion, d.h. sie kann durch eine Taylorentwicklung um $x = 0$ ausgedrückt werden:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \,.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 10 *Funktionen von Operatoren II*

In dieser Aufgabe betrachten wir analytische Funktionen $f(\hat{\sigma}_j)$, wobei $\hat{\sigma}_j$ $(j = x, y, z)$ die Pauli Operatoren sind.

a) Zeigen Sie zuerst, dass die Pauli Operatoren $\hat{\sigma}_j$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ die Relation

$$\hat{\sigma}_j^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_j\,, & \text{für ungerade } n \\ \hat{\mathbb{1}}_2\,, & \text{für gerade } n \end{cases}$$

erfüllen. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie nun unter Verwendung der Relation aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass $f(\hat{\sigma}_j)$ durch folgende Reihe dargestellt werden kann:

$$f(\hat{\sigma}_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \hat{\mathbb{1}}_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \hat{\sigma}_j \,. \tag{1}$$

Was können Sie damit allgemein über Funktionen von Pauli Operatoren sagen? *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie weiterhin

$$f(\hat{\sigma}_x)\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z f(-\hat{\sigma}_x)\,.$$

(1 Punkt)

d) Berechnen Sie Gl. (1) für $f(\hat{\sigma}_x) = \cos(\alpha\hat{\sigma}_x)$, $f(\hat{\sigma}_x) = \sin(\alpha\hat{\sigma}_x)$ und $f(\hat{\sigma}_x) = e^{\mathrm{i}\alpha \boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}}$ mit dem Pauli Vektor $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\sigma}_x \boldsymbol{e}_x + \hat{\sigma}_y \boldsymbol{e}_y + \hat{\sigma}_z \boldsymbol{e}_z$, dem normierten Vektor $\boldsymbol{u} = u_x \boldsymbol{e}_x + u_y \boldsymbol{e}_y + u_z \boldsymbol{e}_z$ $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 11 *Eigenschaften der Spur*

Nehmen Sie an $\{|a_n\rangle\}$ ist eine vollständige, orthonormierte Basis, d.h. es gilt $\sum_n |a_n\rangle\langle a_n| = \hat{\mathbb{1}}_2$ und $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{i,j}$. Desweiteren sei $\{|b_n\rangle\}$ eine Basis mit den selben Eigenschaften. Die beiden Basen könnten z.B. durch $\{|a_n\rangle\} = \{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ und $\{|b_n\rangle\} = \{|\uparrow\rangle_z, |\downarrow\rangle_z\}$ gegeben sein.

a) Zeigen Sie, dass die Spur $\mathrm{Sp}\,(\hat{A})$ eines beliebigen Operators $\hat{A}$ nicht von der Wahl der Basis abhängig ist. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass für die Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\hat{A}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\hat{C}\hat{A})\,.$$

gilt. *(1 Punkt)*