Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 6** **27.05.2022**

Aufgabe 21 *Zwei-Niveau-System*

Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System, dessen Hamiltonoperator duch

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \hbar\Omega\hat{\sigma}_x,$$

gegeben ist, wobei ω_0 und Ω Frequenzen sind und ω_0 auch negativ sein kann.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$ und zeichnen Sie Eigenwerte als Funktion von ω_0. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Zeitentwicklung des Anfangszustands $|\psi\rangle_0 = |\uparrow\rangle_y$ an. Dabei gilt $\hat{\sigma}_y|\uparrow\rangle_y = +|\uparrow\rangle_y$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 22 *Operatoren in Matrixdarstellung*

Betrachten Sie die beiden Operatoren

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & a'-a & 0 \\ a'-a & a & 0 \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} b & -b & b' \\ -b & b & b' \\ b'^* & b'^* & 0 \end{pmatrix},$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $a' \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Operatoren kommutieren. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der beiden Operatoren und finden Sie eine Basis von gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Geben Sie weiterhin die Projektoren auf die verschiedenen Unterräume an. *(2 Punkte)*

Aufgabe 23 *Hermitesche Konjugation*

Betrachten Sie den linearen Operator $\hat{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, wobei $\mathcal{E}$ der Zustandsraum der Dimension n und $\mathcal{E}^*$ sein Dualraum ist. Hierbei gilt $\hat{A} : \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*$. Seien $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{E}$ mit $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle = 1$ und

$$c = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\,. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie das komplex Konjungierte von c. *(0.5 Punkte)*

b) Betrachten Sie den Bra-Zustand $\langle\bar{\phi}| = \langle\phi|\hat{A}$. Welche Beziehung besteht zwischen dem dazugehörigen Ket $|\bar{\phi}\rangle$ und dem Zustand $|\phi\rangle$? *(0.5 Punkte)*

c) Sei nun die Dimension $n = 2$ und der Operator $\hat{A}$ soll die Matrixform

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

haben, wobei $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Sei außerdem $|\psi\rangle = (\psi_1, \psi_2)^T$ und $|\phi\rangle = (\phi_1, \phi_2)^T$. Bestimmen Sie die Beziehung zwischen den Parametern ψ_j (ϕ_j), so dass die Normalisierungsbedingung erfüllt ist. Berechnen Sie nun $\langle\bar{\phi}|$ und $|\bar{\phi}\rangle$ und bestimmen daraus c aus Gl. (1) sowie $(\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle)^*$. *(1 Punkt)*