Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 7** **02.06.2022**

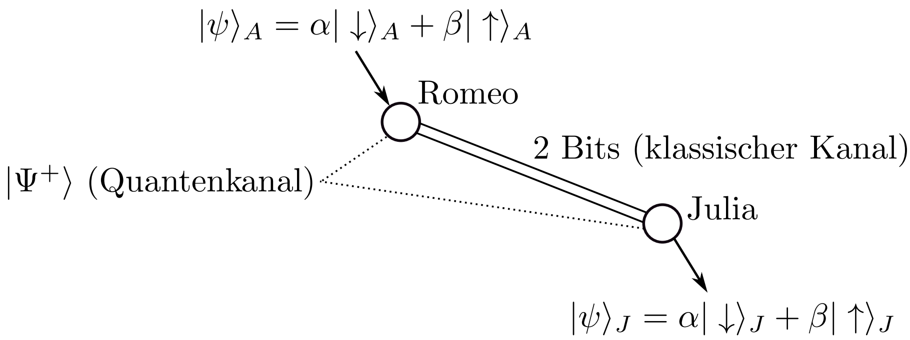
Aufgabe 24 *No-cloning-Theorem und Quantenteleportation*

Romeo spielt oft mit dem Spin von Silberatomen (System A). Manchmal findet er sehr schöne Zustände, die er gerne klonen würde. Er wäre gerne in der Lage jeden möglichen Zustand zu klonen, weil er nicht weiß welchen er gut finden wird. Um das zu erreichen nimmt er ein weiteres Silberatom (System B) im Zustand $|e\rangle_B$ und möchte eine unitäre Transformation $U^{-1} = U^\dagger$ finden, sodass er jeden Zustand des Systems A klonen kann. Die Transformation soll also die Gleichung

$$U|\psi\rangle_A|e\rangle_B = |\psi\rangle_A|\psi\rangle_B, \quad \forall \text{ Spinzustände} |\psi\rangle_A \tag{1}$$

erfüllen.

a) Zeigen Sie, dass eine solche Transformation nicht existiert. *(1 Punkt)*



Das macht Romeo traurig, sodass er hofft den Zustand zumindest der weit erntfernten Julia zeigen zu können. Die beiden können über einen klassischen Kanal kommunizieren indem sie zwei Bits übermitteln. Sie haben weiterhin eine Quelle zur Hand, die Silberatompaare im Bellzustand $|\Psi^+\rangle$ emittiert. Wir erinnern uns daran, dass die vier Bellzustände durch

$$\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle_{RJ} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle_{RJ} + |\uparrow\uparrow\rangle_{RJ}) \\
|\Phi^-\rangle_{RJ} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle_{RJ} - |\uparrow\uparrow\rangle_{RJ}) \\
|\Psi^+\rangle_{RJ} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle_{RJ} + |\uparrow\downarrow\rangle_{RJ}) \\
|\Psi^-\rangle_{RJ} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle_{RJ} - |\uparrow\downarrow\rangle_{RJ})
\end{aligned} \tag{2}$$

gegeben sind, wobei die Indizes R und J angeben welche Atome zu Romeo bzw. zu Julia fliegen. Nun kann Romeo Bellmessungen an den zwei Systemen A und R durchführen, d.h. er kann feststellen in welchem Bellzustand sich das Atompaar befindet. Julia hingegen kann jede mögliche unitäre Transformation an ihrem Atom durchführen (sie arbeitet an dem System J).

b) Nehmen Sie an der Zustand den Romeo Julia zeigen will sei

$$|\psi\rangle_A = \alpha|\downarrow\rangle_A + \beta|\uparrow\rangle_A. \tag{3}$$

Schreiben Sie den Zustand $|\Gamma\rangle_{ARJ}$ des Gesamtsystems, das aus den Subsystemen A, R und J besteht, auf. *(1 Punkt)*

c) Schreiben Sie den Zustand $|\Gamma\rangle_{ARJ}$ nun als eine Summe von Tensorprodukten von Bellzuständen des AR Subsystems und Zuständen des Subsystems J, d.h.

$$|\Gamma\rangle_{ARJ} \propto \sum_{i=1}^{4} |\eta^i\rangle_{AR} \otimes |\phi^i\rangle_J \tag{4}$$

wobei $|\eta^i\rangle_{AR}$ die vier Bellzustände des Systems AR darstellen und $|\phi^i\rangle_J$ Zustände des Systems J sind, die Sie herausfinden sollen. *(1 Punkt)*

d) Was passiert wenn Romeo eine Bellmessung an seinem Subsystem durchführt? *(1 Punkt)*

e) Romeo kann die Informationen die Julia benötigt um in ihrem System J den ursprünglichen Zustand $|\psi\rangle_A$ herzustellen, über den klassischen Kanal durch zwei klassische Bits übertragen, wenn sich die beiden vorher auf eine Art von Kode geeinigt haben. Wie kann Julia das Herstellen des Zustandes erreichen? *(1 Punkt)*

f) Welche unitäre Transformation muss Julia durchführen nachdem sie die klassischen Informationen von Romeo empfangen hat um den gewünschten Zustand $|\psi\rangle_J = \alpha|\downarrow\rangle_J + \beta|\uparrow\rangle_J$ zu erhalten? *(1 Punkt)*

Jetzt ist Romeo doch noch glücklich.

Aufgabe 25 *Hermitian Operators*

a) Beweisen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell sind. *(1 Punkt)*

b) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ lineare hermitesche Operatoren, die auf $\mathcal{E}$ definiert sind. Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren, d.h. $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, wenn $\hat{A}\hat{B} = (\hat{A}\hat{B})^\dagger$ gilt. *(0.5 Punkte)*

c) Sei $\hat{P} = |\psi\rangle\langle\psi|$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{E}$ definiert, so dass $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$ und normalisiert ist. Zeigen Sie, dass $\hat{P}$ die Eigenschaften $\hat{P} = \hat{P}^2$ und $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$ hat und somit ein Projektionsoperator ist. *(0.5 Punkte)*