Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 8** **09.06.2022**

Aufgabe 26 *Operatoren*

Betrachten Sie den Zustandsraum $\mathcal{E}$ eines physikalischen Systems und zwei Observablen, die durch die Operatoren $\hat{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ und $\hat{B} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ beschrieben werden.

a) Beweisen Sie die Relation ($l \in \mathbb{N}^+$)

$$[\hat{A}, \hat{B}^l] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{l-1} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{l-2} + \cdots + \hat{B}^{l-2}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}^{l-1}[\hat{A}, \hat{B}]\,.$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass in einem *endlich* dimensionalen Zustandsraum keine Operatoren $\hat{O}_1$ und $\hat{O}_2$ existieren, die die Kommutatorrelation $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = \mathrm{i}\hbar$ erfüllen.
Hinweis: Benutzen Sie die Spur. *(1 Punkt)*

Aufgabe 27 *Der Verschiebeoperator*

Betrachten Sie $\hat{S}_Q(\lambda) = \exp(-i\frac{\lambda\hat{P}}{\hbar})$, wobei $\hat{P}$ der Impulsoperator definiert auf dem Vektorraum $\mathcal{E}$ ist, und $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{S}_Q(\lambda)$ unitär ist. *(0.5 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass $\hat{S}_Q(\lambda)\hat{S}_Q(\mu) = \hat{S}_Q(\lambda + \mu)$ für alle $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. *(0.5 Punkte)*

c) Sei $\hat{Q}$ ein positiver Operator auf $\mathcal{E}$, der die Kommutationsbeziehung $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\mathbb{1}$ erfüllt, wobei $\mathbb{1}$ der Identitätsoperator auf $\mathcal{E}$ ist. Zeigen Sie, dass $[\hat{Q}, \hat{S}_Q(\lambda)] = \lambda\hat{S}_Q(\lambda)$ (Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 26) *(1 Punkt)*

d) Konstruieren Sie einen Operator $\hat{S}_P(\lambda)$, so dass $[\hat{P}, \hat{S}_P(\lambda)] = \lambda\hat{S}_P(\lambda)$ *(1 Punkt)*

e) Gegeben sei $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, und $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ (Wellenfunktion in Ortssdarstellung). Zeigen Sie, dass $\langle q|\hat{S}_Q(\lambda)|\psi\rangle = \psi(q - \lambda)$. Also verschiebt $\hat{S}_Q(\lambda)$ die Wellenfunktion um λ. *(1 Punkt)*

f) Zeigen Sie, dass in der Ortsdarstellung gilt: *(1 Punkt)*

$$\hat{S}_Q(\lambda) = \int dq \;\; |q + \lambda\rangle\langle q|.$$

g) Zeigen Sie, dass wenn $|q\rangle$ n-fach entarted ist, dann ist auch $\hat{S}_Q(\lambda)|q\rangle$ n-fach entartet ($n \in \mathbb{N}^+$). *(1 Punkt)*