Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 3** **05.05.2022**

Aufgabe 12 *Hermitizität*

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ seien Operatoren auf dem Raum $\mathscr{E}$ der Zustände eines Teilchens.

a) Zeigen Sie, dass jeder Operator $\hat{D}$ als Summe eines hermiteschen und eines anti-hermitesche Operators, d.h.

$$\hat{D} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2, \tag{1}$$

geschrieben werden kann mit $\hat{D}_1 = \hat{D}_1^\dagger$ und $\hat{D}_2 = -\hat{D}_2^\dagger$. *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie den Operator

$$\hat{C} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{B}, \tag{2}$$

wobei $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesch sind. Unter welchen Bedingungen an α und β ist auch $\hat{C}$ hermitesch? *(1 Punkt)*

c) Betrachten Sie noch einmal den Operator aus Gl. (2) mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Welche Bedingungen müssen α und β nun erfüllen, damit $\hat{C}$ hermitesch ist? *(1 Punkt)*

d) Finden Sie für den Fall der vorangehenden Teilaufgabe ($\hat{C} = \hat{C}^\dagger$) die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{C}$. *(1 Punkt)*

e) Geben Sie die unitäre Transformation an die $\hat{C}$ diagonalisiert. *(1 Punkt)*

f) Schreiben Sie die Matrizen, die die Projektion auf die Eigenvektoren beschreiben, und vergewissern Sie sich, dass diese die Orthogonalität und Vollständigkeit erfüllen. *(1 Punkt)*

Aufgabe 13 *Dichteoperator I*

Betrachten wir den Operator der den Zustand eines magnetischen Dipols beschreibt

$$\hat{\rho} = p_z|\uparrow\rangle_z\langle\uparrow| + p_x|\uparrow\rangle_x\langle\uparrow| + p_y|\uparrow\rangle_y\langle\uparrow|. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die Bedingungen für die Koeffizienten p_j, $\{j = x, y, z\}$, damit $\hat{\rho}$ ein Dichteoperator ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit den Dipol im Zustand $|\downarrow\rangle_z$ zu messen. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Bedingung für p_j, so dass die Wahrscheinlichkeit den Zustand $|\psi\rangle = \cos\theta/2|\uparrow\rangle_z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta/2|\downarrow\rangle_z$ zu messen verschwindet. *(0.5 Punkte)*

Aufgabe 14 *Dichteoperator II*

a) Zeigen Sie, dass der Dichteoperator eines Spins immer als

$$\hat{\rho} = a_0 \hat{\mathbb{1}} + \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = a_0 \hat{\mathbb{1}} + \sum_{j=x,y,z} a_j \hat{\sigma}_j, \tag{5}$$

geschrieben werden kann mit $a_0 \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Bedingungen an a_0 und $\boldsymbol{a}$ damit $\hat{\rho}$ einen Dichteoperator darstellt. *(2 Punkte)*

b) Nehmen Sie an $\hat{\rho}$ sei der Dichteoperator des Zustands

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \sin\theta/2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die explizite Form von $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ und die Erwartungswerte von $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ und $\hat{\sigma}_z$. Bringen Sie $\hat{\rho}$ in die Form von Gl. (5) und bestimmen Sie a_0 und $\boldsymbol{a}$. *(1 Punkt)*

c) Schreiben Sie den Dichteoperator eines unpolarisierten Strahls von Silberatomen und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ zu messen in jeder Richtung gleich ist. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und $\vec{a}$ in Gl. (5) für den Dichteoperator aus Gl. (4). *(0.5 Punkte)*

Aufgabe 15 *Von-Neumann Entropie*

Die Von-Neumann Entropie ist allgemein definiert als

$$S = -\mathrm{Tr}\{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\},$$

wobei $\hat{\rho}$ ein Dichteoperator ist.

a) Zeigen Sie, dass $0 \leq S \leq \ln 2$. Diskutieren Sie die Eigenschaften des Dichteoperators $\hat{\rho}$, wenn $S = 0$ und wenn $S = \ln 2$ ist. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie S für den Dichteoperator aus Gl. (4). *(0.5 Punkte)*