Vorrechnen des Übungsblattes: Freitag, 25.11. und Montag 28.11.2011

12. Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen als kanonische Transformationen

Der Zustand eines N-Teilchensystems wird durch einen Punkt $\xi_i = (p_1, \ldots, p_{3N}, q_1, \ldots, q_{3N})$ im $6N$-dimensionalen Phasenraum beschrieben, mit $d^{6N}\xi = d^{3N}p\, d^{3N}q$ als zugehörigem Volumenelement. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Lösungen $\xi_i = \xi_i(t, \xi_k^{(0)})$ der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen eine kanonische Transformation zwischen dem Anfangspunkt $\xi_k^{(0)} = \xi_k(0)$ und dem Endpunkt $\xi_i = \xi_i(t)$ darstellen. Um den Beweis stringent führen zu können, sind einige theoretische Vorkenntnisse von Nutzen, die in den folgenden Teilaufgaben erarbeitet werden sollen.

(a) Matrizen, $S \in \mathbb{R}^{(2d)\times(2d)}$ die der Bedingung

$$S^T J\, S = J \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_d \\ -\mathbb{1}_d & 0 \end{pmatrix} = -J^T = -J^{-1}$$

genügen, werden als symplektisch bezeichnet. Zeigen Sie, dass die symplektischen Matrizen eine Gruppe bzgl. Matrixmultiplikation bilden, in der die Inverse durch $S^{-1} = J^T S^T J$ gegeben ist. Diese Gruppe wird gewöhnlich mit $\mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$ abgekürzt.

(2 Punkte)

(b) Verifizieren Sie, dass sich mit Hilfe der J-Matrix die Poisson-Klammer zweier Phasenraumfunktionen $f(p,q)$ und $g(p,q)$

$$\{f,g\}(p,q) = \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right],$$

sowie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

umschreiben lassen zu

$$\{f,g\}(\xi) = -\sum_{i,k=1}^{6N} J_{ik} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_k} \quad \text{und} \quad \dot{\xi}_i = -\sum_{k=1}^{6N} J_{ik}\frac{\partial H}{\partial \xi_k}.$$

(2 Punkte)

(c) Eine Transformation $\xi_i = \xi_i(\xi_k^{(0)})$ der Phasenraumpunkte heißt kanonisch, wenn sie die Poisson-Klammern für *alle* Phasenraumfunktionen f und g invariant lässt, d.h. wenn entsprechend der Definition $f(\xi) = f^{(0)}(\xi^{(0)})$

$$\{f,g\}(\xi) = \left\{f^{(0)}, g^{(0)}\right\}(\xi^{(0)}) \quad \forall \quad f,g$$

gilt. Wir bezeichnen nun das Differential der Phasenraumtransformation durch die Matrix

$$S_{ik}(\xi^{(0)}) = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k^{(0)}} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi^{(0)}}\right)_{ik}.$$

Zeigen Sie damit:

$$\xi_i = \xi_i(\xi_k^{(0)}) \text{ ist kanonisch} \quad \Longleftrightarrow \quad S^T(\xi^{(0)})\, J\, S(\xi^{(0)}) = J.$$

(4 Punkte)

(d) Sei $\xi_i = \xi_i(t, \xi_k^{(0)})$ die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\xi}_i = -\sum_{k=1}^{6N} J_{ik}\frac{\partial H}{\partial \xi_k}$$

für die Anfangsbedingungen $\xi_k^{(0)}$. Beweisen Sie, dass die Matrix

$$S_{ik}(t, \xi^{(0)}) = \frac{\partial \xi_i(t, \xi_p^{(0)})}{\partial \xi_k^{(0)}}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{dS_{il}}{dt} = -\sum_{j,k=1}^{6N} J_{ij} \left.\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right|_{\xi=\xi(\xi^{(0)})} S_{kl}(t, \xi^{(0)})$$

genügt.

(2 Punkte)

(e) Zeigen Sie damit, dass $S_{ik}(t, \xi_p^{(0)})$ für alle $t \geq 0$ eine symplektische Matrix ist, indem Sie die Ableitung des Produkts $S^T(t, \xi^{(0)})\, J\, S(t, \xi^{(0)})$ nach t betrachten. Begründen Sie, warum hiermit bewiesen ist, dass die Transformation $\xi_i = \xi_i(t, \xi_k^{(0)})$ für alle $t \geq 0$ kanonisch ist?

(3 Punkte)

13. Liouville-Gleichung

Analog zur letzten Aufgabe, sei mit $\xi_i = \xi_i(t, \xi_k^{(0)})$ die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\xi}_i = -\sum_{k=1}^{6N} J_{ik}\frac{\partial H}{\partial \xi_k}$$

zu den Anfangsbedingungen $\xi_k^{(0)}$ gegeben. Ferner beschreibe $\Gamma(t)$ die Phasenraumregion, die durch die zeitliche Evolution der Punkte der anfänglichen Phasenraumregion $\Gamma(0)$ entsteht.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Resultats $S^T(t, \xi^{(0)})\, J\, S(t, \xi^{(0)}) = J$ aus der letzten Aufgabe das Liouvillsche Theorem , das besagt, dass das Phasenraumvolumen über $\Gamma(t)$ dem Phasenraumvolumen über $\Gamma(0)$ entspricht, d.h.

$$\int_{\Gamma(t)} d^{6N}\xi = \int_{\Gamma(0)} d^{6N}\xi^{(0)} = \text{const.}$$

(2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass aus der Annahme der Konstanz des Integrals über die Phasenraumdichte $\rho(t,\xi)$ (Gesamtzahl der „Teilchen“ eines Ensembles innerhalb $\Gamma(t)$ soll erhalten bleiben)

$$\int\limits_{\Gamma(t)} \rho(t,\xi)\, d^{6N}\xi = \int\limits_{\Gamma(0)} \rho(0,\xi^{(0)})\, d^{6N}\xi^{(0)} = \mathrm{const.}$$

die Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0$$

als Evolutionsgleichung für die Phasenraumdichte $\rho(t,\xi)$ folgt.

(2 Punkte)

14. Das Poincarésche Wiederkehrtheorem

In dieser Aufgabe gehen wir von einem zeitunabhängigen Hamiltonian $H(\vec{p},\vec{q})$ aus und betrachten lediglich beschränkte Phasenraumtrajektorien $\vec{p} = \vec{p}(t,\vec{p}_0,\vec{q}_0)$ und $\vec{q} = \vec{q}(t,\vec{p}_0,\vec{q}_0)$ für die $\vec{p}^{\,2}(t) < \infty$ und $\vec{q}^{\,2}(t) < \infty$ auf der Energieschale $H(\vec{p},\vec{q}) = E$ gilt. Das heisst, die Phasenraumtrajektorien liegen alle in einem endlichen Phasenraumvolumen Γ. Wir wählen einen beliebigen Punkt $P \in \Gamma$ und betrachten eine kleine Umgebung $U_P(\varepsilon) \subset \Gamma$ um P. Das Poincarésche Wiederkehrtheorem besagt nun, dass für alle $\varepsilon > 0$ Trajektorien mit einem Anfangspunkt $(\vec{p}_0,\vec{q}_0) \in U_P(\varepsilon)$ existieren, die, falls sie die Umgebung $U_P(\varepsilon)$ verlassen, nach genügend langer Zeit wieder nach $U_P(\varepsilon)$ zurückkehren.

Beweisen Sie das Poincarésche Wiederkehrtheorem mit Hilfe des Liouvillschen Theorems.

(3 Punkte)