Vorrechnen des Übungsblattes: Freitag, 09.12. und Montag 12.12.2011

17. Aspekte zur Herleitung der BBGKY-Hierarchie

Gemäß der Vorlesung, lautet die Liouville-Gleichung eines Systems von N wechselwirkenden Teilchen, die durch die auf Eins normierte und vollständig symmetrische Phasenraum-Verteilungsfunktion $\rho(\vec{z}_1,\dots\vec{z}_N;t)=\rho(\vec{p}_1,\dots\vec{p}_N,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N;t)$ beschrieben werden,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+h_N(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_N)\,\rho=0\,,$$

wobei $\vec{z}_i=(\vec{p}_i,\vec{r}_i)$ die kombinierte Variable des i-ten Teilchens ($i\in\{1,\dots,N\}$) bezeichnet. Hierbei wurde in der Liouville-Gleichung der sogenannte Liouville-Operator

$$h_N(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_N)=\sum_{j=1}^{N}S_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}P_{ij}$$

eingeführt, welcher die Einteilchen- bzw. Zweiteilchen-Operatoren

$$S_i=\frac{\vec{p}_i}{m}\,\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}+\vec{F}_i\,\vec{\nabla}_{\vec{p}_i}\quad\text{und}\quad P_{ij}=\vec{K}_{ij}(\vec{\nabla}_{\vec{p}_i}-\vec{\nabla}_{\vec{p}_j})$$

mit $\vec{F}_i=-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}U(\vec{r}_i)$ und $\vec{K}_{ij}=-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}v(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$ enthält. Ferner beschreibt $U(\vec{r}_i)$ die äußere, potentielle Energie und $v(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$ die Wechselwirkungsenergie zweier Teilchen.

(a) Beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Wechselwirkungskraft $\vec{K}_{ij}=-\vec{K}_{ji}$ und des Zweiteilchen-Operators $P_{ij}=P_{ji}$.

(2 Punkte)

(b) Ausgehend von der vollständig symmetrischen Phasenraum-Verteilungsfunktion $\rho(\vec{z}_1,\dots\vec{z}_N;t)$ wurde in der Vorlesung die s-Teilchen-Verteilungsfunktion ($s\in\{1,\dots,N\}$) über

$$f_s(\vec{z}_1{}',\dots,\vec{z}_s{}';t)=\left\langle\sum_{j_1=1}^{N}\delta^{(6)}(\vec{z}_{j_1}-\vec{z}_1{}')\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{N}\delta^{(6)}(\vec{z}_{j_2}-\vec{z}_2{}')\;\dots\sum_{\substack{j_s=1\\ j_s\neq\{j_1,\dots,j_{s-1}\}}}^{N}\delta^{(6)}(\vec{z}_{j_s}-\vec{z}_s{}')\right\rangle$$

definiert. Zeigen Sie, dass sich s-Teilchen-Verteilungsfunktion umschreiben läßt zu

$$f_s(\vec{z}_1{}',\dots,\vec{z}_s{}';t)=\frac{N!}{(N-s)!}\int_{\mathbb{R}^6}d^6z_{s+1}\dots\int_{\mathbb{R}^6}d^6z_N\,\rho(\vec{z}_1{}',\dots,\vec{z}_s{}',\vec{z}_{s+1},\dots,\vec{z}_N;t)\,.$$

Auf welchen Wert ist dementsprechend die Einteilchen-Verteilungsfunktion $f_1(\vec{z}_1{}';t)$ bzw. die Zweiteilchen-Verteilungsfunktion $f_2(\vec{z}_1{}',\vec{z}_2{}';t)$ normiert? Wie lassen sich diese Resultate physikalisch interpretieren.

(2 Punkte)

(c) Verifizieren Sie die Zerlegung des Liouville-Operators

$$h_N(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_N)=h_s(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s)+h_{N-s}(\vec{z}_{s+1},\dots,\vec{z}_N)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=s+1}^{N}P_{ij}$$

basierend auf den entsprechenden Liouville-Suboperatoren

$$h_s(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s)=\sum_{j=1}^{s}S_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}P_{ij}\quad\text{und}\quad h_{N-s}(\vec{z}_{s+1},\dots,\vec{z}_N)=\sum_{j=s+1}^{N}S_j+\frac{1}{2}\sum_{i=s+1}^{N}\sum_{\substack{j=s+1\\ j\neq i}}^{N}P_{ij}\,.$$

(1 Punkt)

(d) Zeigen Sie schließlich die Gültigkeit der Integralrelationen

$$I_2=\frac{N!}{(N-s)!}\int_{\mathbb{R}^6}d^6z_{s+1}\dots\int_{\mathbb{R}^6}d^6z_N\,h_{N-s}(\vec{z}_{s+1},\dots,\vec{z}_N)\,\rho(\vec{z}_1,\dots\vec{z}_N;t)=0$$

und

$$\begin{aligned}I_3&=\frac{N!}{(N-s)!}\int_{\mathbb{R}^6}d^6z_{s+1}\dots\int_{\mathbb{R}^6}d^6z_N\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=s+1}^{N}P_{ij}\,\rho(\vec{z}_1,\dots\vec{z}_N;t)\\&=\sum_{i=1}^{s}\int_{\mathbb{R}^6}d^6z_{s+1}\,P_{i,s+1}\,f_{s+1}(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_{s+1};t)\,.\end{aligned}$$

(4 Punkte)