Vorrechnen des Übungsblattes: Donnerstag, 09.02.2012

29. Teilchenzahl-Fluktuationen für das ideale Bose- und Fermi-Gas in der großkanonischen Gesamtheit

Im großkanonischen Ensemble werden die Erwartungswerte einer Größe $A(\{n_{\vec{p}}\})$, die von den Besetzungszahlen $n_{\vec{p}}$ abhängt, gemäß der Relation

$$\langle A(\{n_{\vec{p}}\})\rangle = \frac{1}{Q(V,\beta,z)}\sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\vec{p}}\} \\ \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}=N}} A(\{n_{\vec{p}}\})\, e^{-\beta\sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}\varepsilon_{\vec{p}}} \qquad (1)$$

berechnet. Dabei lautet die großkanonische Zustandssumme wie in der Vorlesung gezeigt

$$Q(V,\beta,z) = \prod_{\vec{p}} \left[1 \mp z e^{-\beta\varepsilon_{\vec{p}}}\right]^{\mp 1} \qquad (\text{„}-\text{“ für BE und „}+\text{“ für FD}),$$

und die Besetzungszahlen durchlaufen folgende Werte: $n_{\vec{p}} \in \{0,1,2,3,\ldots\}$ für Bosonen (BE: Bose-Einstein Statistik) und $n_{\vec{p}} \in \{0,1\}$ für Fermionen (FD: Fermi-Dirac Statistik).

(a) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von Glg. (1) die Gültigkeit der Relation

$$\langle n_{\vec{p}}\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Q}{\partial \varepsilon_{\vec{p}}},$$

und bestimmen Sie hierüber die aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke für die mittleren Besetzungszahlen

$$\langle n_{\vec{p}}\rangle = \frac{z e^{-\beta\varepsilon_{\vec{p}}}}{1 \mp z e^{-\beta\varepsilon_{\vec{p}}}} \qquad (\text{„}-\text{“ für BE und „}+\text{“ für FD}).$$

(2 Punkte)

(b) Leiten Sie den Zusammenhang

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\langle n_{\vec{p}}\rangle}{\partial \varepsilon_{\vec{p}}} = \langle n_{\vec{p}}^2\rangle - \langle n_{\vec{p}}\rangle^2$$

ab und zeigen Sie damit, dass für die relativen Teilchenzahl-Fluktuationen gilt

$$\frac{(\Delta n_{\vec{p}})^2}{\langle n_{\vec{p}}\rangle^2} = \frac{\langle n_{\vec{p}}^2\rangle - \langle n_{\vec{p}}\rangle^2}{\langle n_{\vec{p}}\rangle^2} = \frac{1}{\langle n_{\vec{p}}\rangle} \pm 1 \qquad (\text{„}+\text{“ für BE und „}-\text{“ für FD}).$$

(2 Punkte)

30. Bose-Einstein-Kondensation in einem isotropen, dreidimensionalen harmonischen Oszillator

In dieser Aufgabe soll die Kondensation eines idealen Bose-Gases in einem isotropen, dreidimensionalen harmonischen Oszillator untersucht werden. Der zugehörige Einteilchen-Hamilton-Operator lautet mit $\vec{x}^T = (x,y,z)$

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\vec{x}^2$$

und besitzt die Einteilchen-Energieeigenwerte $\varepsilon_{\vec{q}} = \varepsilon_{q_x q_y q_z} = \hbar\omega(q_x + q_y + q_z + \frac{3}{2})$ mit $q_i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Leiten Sie ausgehend von der großkanonischen Zustandssumme

$$Q(V,\beta,z) = \prod_{\vec{q}} (1 - z e^{-\beta\varepsilon_{\vec{q}}})^{-1}$$

den folgenden Ausdruck für die mittlere Teilchenzahl ab:

$$\langle N\rangle = z\frac{\partial \ln Q}{\partial z} = \langle n_{\vec{0}}\rangle + \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3 \cdot g_3(z e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega\beta}), \quad g_3(z) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^3} \quad (\text{Polylogarithmus: } \mathrm{Li}_3(z)).$$

Approximieren Sie die dabei auftretende Summe $\sum_{\vec{q}}$ durch das Integral $\int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_y \int_0^\infty dq_z$ nachdem Sie die Besetzungszahl des Grundzustandes $\langle n_{\vec{0}}\rangle$ abgespalten haben, und verwenden Sie die geometrische Reihe.

(2 Punkte)

(b) Begründen Sie, warum für $\mu \to \mu_c$ eine Bose-Einstein-Kondensation bei $T \to 0$ auftritt. Hierbei bezeichnet $\mu_c = \frac{3}{2}\hbar\omega$ das kritische chemische Potential. Berechnen Sie die zugehörige kritische Temperatur T_c bei der die Bose-Einstein-Kondensation einsetzt indem Sie T_c aus der Bedingung $n_{\vec{0}} = 0$ ableiten. Zeigen Sie, dass sich damit für $T < T_c$ der Anteil der kondensierten Bosonen über die folgende Relation ergibt:

$$\frac{\langle n_{\vec{0}}\rangle}{\langle N\rangle} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3.$$

(2 Punkte)

31. Relativistisches Fermi-Gas, Weiße Zwerge und Chandrasekhar-Masse

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Druck- und dem Dichteverlauf im Inneren eines (kugelförmigen, nichtrotierenden) Weißen Zwerges und berechnen die Grenzmasse, die sogenannte Chandrasekhar-Masse, ab welcher ein Weißer Zwerg instabil wird und unter seiner eigenen Gravitationskraft kollabiert. Wir nehmen an, dass der Weiße Zwerg aus vollständig ionisiertem Helium ^{4}He besteht. Das Elektronengas kann dabei als vollständig entartet angesehen werden, da dessen Temperatur $T \approx 10^6$ K viel kleiner ist als die typische Fermi-Temperatur $T_F \approx 10^9$ K. Das relativistische Elektronengas wirkt dem durch die Heliumkerne erzeugten Gravitationsdruck entgegen, so dass sich ein hydrostatisches Gleichgewicht einstellt.

Um den lokalen Gleichgewichtszustand eines kleinen Teils des Elektronengases innerhalb des Weißen Zwerges zu beschreiben, betrachten wir die großkanonische Zustandssumme für ein relativistisches Fermi-Gas, das sich in einem Kasten mit der Kantenlänge L und dem Volumen V

befinde (periodischen Randbedingungen). Wir nehmen an, dass das Kastenvolumen V innerhalb des Weißen Zwerges so klein ist, dass die lokale Elektronendichte und die Dichte der ^{4}He-Kerne als konstant angesehen werden können. Mit $s = \frac{1}{2}$ sei der Spin der Elektronen, mit $g = 2s+1 = 2$ der zugehörige Entartungsfaktor und mit $n_e = \langle N_e \rangle / V$ die lokale Dichte des Elektronengases bezeichnet. Dann lautet der Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme des Fermi-Gases

$$\ln Q(V,\beta,z) = g \sum_{\vec{p}} \ln(1 + z\, e^{-\beta \varepsilon_{\vec{p}}}) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{\vec{p}} = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}}{m_e c}\right)^2}$$

als relativistischer Einteilchenenergie eines Elektrons mit Impuls $\vec{p}$ und Masse $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg.

(a) Approximieren Sie die Zustandssumme für große $L \gg 1$ analog zur Vorlesung durch ein Integral über alle Impulse und zeigen Sie ausgehend von $\Omega = -kT \ln Q(V,\beta,z) = -PV$, dass sich der Druck des Elektronengases P über das Integral

$$P = \frac{4\pi g}{3h^3} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{dp} \frac{p^3\, dp}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon(p)} + 1}$$

ergibt, wobei $\varepsilon(p) = \varepsilon_{\vec{p}}$ mit $p = |\vec{p}|$. Berechnen Sie das Integral für den Grenzfall $T \to 0$, indem Sie die Relation $\lim_{T\to 0} 1/(z^{-1}e^{\beta\varepsilon(p)} + 1) = \Theta(\varepsilon(p_F) - \varepsilon(p))$ verwenden. Der Fermi-Impuls p_F entspricht hierbei dem Radius der Impulskugel und ist über die Relation

$$g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2\, dp = \frac{gV}{h^3} \frac{4\pi p_F^3}{3} = \langle N_e \rangle$$

definiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $\frac{p}{m_e c} = \sinh x$, dass sich folgender Ausdruck für den Elektronendruck ergibt

$$P = \frac{\pi g m_e^4 c^5}{6h^3} f\left(\frac{p_F}{m_e c}\right), \quad \text{wobei} \quad f(y) = y(2y^2 - 3)\sqrt{1+y^2} + 3\,\text{arsinh}(y)\,. \tag{2}$$

(3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die führende Ordnung des Ausdrucks (2) für den nichtrelativistischen Grenzfall $\frac{p}{m_e c} \ll 1$, indem Sie die Reihenentwicklung $\text{arsinh}(y) = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \mathcal{O}(y^7)$ verwenden. Zeigen Sie damit, dass sich nach Ersetzen des Fermi-Impulses der Ausdruck

$$\frac{p}{m_e c} \ll 1: \quad P = C_{\text{nr}} \cdot n_e^{\gamma_{\text{nr}}} \quad \text{mit} \quad C_{\text{nr}} = \frac{g\hbar^2}{30\pi^2 m_e}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{\frac{5}{3}} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \gamma_{\text{nr}} = \frac{5}{3}$$

für den Druck ergibt, wobei γ_{nr} den Adiabatenexponenten im nichtrelativistischen Grenzfall bezeichnet.

(1 Punkt)

(c) Berechnen Sie die führende Ordnung des Ausdrucks (2) für den ultrarelativistischen Fall $\frac{p}{m_e c} \gg 1$. Verwenden Sie dazu die asymptotische Entwicklung $\text{arsinh}(y) = \ln(2y) + \mathcal{O}(\frac{1}{y^2})$ für $y \gg 1$ und leiten Sie den folgenden Ausdruck ab:

$$\frac{p}{m_e c} \gg 1: \quad P = C_{\text{ur}} \cdot n_e^{\gamma_{\text{ur}}} \quad \text{mit} \quad C_{\text{ur}} = \frac{g\, c\, \hbar}{24\pi^2}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{\frac{4}{3}} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \gamma_{\text{ur}} = \frac{4}{3}\,.$$

(1 Punkt)

(d) Wir kommen nun zur Berechnung des kugelsymmetrischen Druck- und Massendichteverlaufs $P(r)$ und $\varrho(r)$ im Inneren eines Weißen Zwerges ($0 < r \leq R$), dessen Radius und Masse wir mit R und M bezeichnen. Zuerst bemerken wir, dass die Elektronendichte $n_e(r) = \langle N_e(r) \rangle / V$ vom Abstand r zwischen Volumen V und Zentrum des Weißen Zwerges abhängt. Da aufgrund der vollständigen Ionisation auf die vier Nukleonen des ^{4}He-Kerns zwei Elektonen kommen, ergibt sich entsprechend für die Massendichte $\rho(r) = 2m_u\, n_e(r)$, mit $m_u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg als atomarer Masseneinheit. Der Beitrag der Elektronen zur Massendichte kann dabei wegen $\frac{m_e}{m_u} \approx 5.5 \cdot 10^{-4}$ vernachlässigt werden. Wir beschränken uns im Folgenden auf die in den Aufgabenteilen b) und c) untersuchten Fälle des nichtrelativistischen und des ultrarelativistischen Elektronengases. Mit den Ausdrücken für die Elektronendichte aus b) und c) finden wir den folgenden Zusammenhang zwischen Druck und Massendichte

$$P(r) = K \cdot (\varrho(r))^\gamma = K \cdot (\varrho(r))^{\frac{1+n}{n}}$$

mit der vom Fall abhängigen Konstanten $K \in \{C_{\text{nr}}/(2m_u)^{\gamma_{\text{nr}}}, C_{\text{ur}}/(2m_u)^{\gamma_{\text{ur}}}\}$, dem adiabatischen Exponenten $\gamma \in \{\gamma_{\text{nr}}, \gamma_{\text{ur}}\}$ und dem zugehörigen Polytropen-Index $n = 1/(\gamma - 1)$.

Leiten Sie aus der Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\varrho(r)$$

und der Gleichung für die Massen-Erhaltung

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(r')\, r'^2\, dr'\,,$$

die folgende Relation her:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\varrho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi\, G\, \varrho(r)\,. \tag{3}$$

Dabei ist $M(r)$ die Masse innerhalb der Kugel mit Radius r und $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante.

(1 Punkt)

(e) Ersetzen Sie in Glg. (3) die Massendichte $\varrho(r)$ durch die dimensionlose Funktion $\theta(r)$, die über $\varrho(r) = \varrho_c\, \theta^n(r)$ definiert ist. Dabei bezeichnen wir mit $\varrho_c = \rho(0)$ die Massendichte im Zentrum des Weißen Zwerges. Führen Sie desweiteren die neue Koordinate $\xi = r/a$ über die Skalierungskonstante $a^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G}\,(\varrho_c)^{\frac{1-n}{n}}$ ein und zeigen Sie damit, dass sich die Differentialgleichung (3) in die folgende Form bringen lässt:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n\,. \tag{4}$$

Wie lauten die Anfangsbedingungen für $\xi = 0$, die die Lösung $\theta(\xi)$ dieser Differentialgleichung eindeutig festlegen?

(2 Punkte)

(f) Begründen Sie, warum die erste Nullstelle ξ_1 der dimensionlosen Massendichte $\theta(\xi)$ den Radius R des Weißen Zwerges bestimmt. Beweisen Sie, dass seine Masse $M = M(R)$ entsprechend durch die Gleichung

$$M = 4\pi\, \varrho_c\, R^3 \left(-\frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \bigg|_{\xi=\xi_1} \tag{5}$$

gegeben ist.

(1 Punkt)

Bemerkung: Die numerische Integration der Differentialgleichung (4) liefert die Werte:

(i) Nichtrelativistischer Grenzfall: Adiabatenexponent $\gamma_{\mathrm{nr}} = \frac{5}{3}$, Polytropen-Index $n_{\mathrm{nr}} = \frac{3}{2}$, erste Nullstelle $\xi_1^{\mathrm{nr}} = 3.65$ und $\left(-\frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1}^{\mathrm{nr}} = 0.055642\,.$

(ii) Ultrarelativistischer Grenzfall: Adiabatenexponent $\gamma_{\mathrm{ur}} = \frac{4}{3}$, Polytropen-Index $n_{\mathrm{ur}} = 3$, erste Nullstelle $\xi_1^{\mathrm{ur}} = 6.90$ und $\left(-\frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1}^{\mathrm{ur}} = 0.006152\,.$

(g) Bestimmen Sie ρ_c als Funktion von R und beweisen Sie damit den Zusammenhang

$$M(R) = 4\pi \left(\frac{4\pi\, G}{\xi_1^2\, K\,(n+1)} \right)^{\frac{n}{1-n}} \left(-\frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \bigg|_{\xi=\xi_1} R^{\frac{3-n}{1-n}} \tag{6}$$

zwischen Masse M und Radius R des Weißen Zwerges.

(1 Punkt)

(h) Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Grenzfall die Masse-Radius-Relation (6)

$$\left(\frac{M}{M_\odot} \right) \cdot R^3 \approx (8887\ \mathrm{km})^3$$

lautet, wobei $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg die Masse unserer Sonne ist. Was passiert demnach mit dem Radius R, wenn wir die Masse M des Weißen Zwerges erhöhen?

(1 Punkt)

(i) Zeigen Sie, dass die Masse M des Weißen Zwerges im ultrarelativistischen Fall nicht von dessen Radius R abhängt und bestimmen Sie für diesen Fall aus (6) die Chandrasekhar-Grenzmasse

$$M_{\mathrm{ch}} \approx 1.46 \cdot M_\odot\,.$$

Was für ein Schicksal erwartet einen Stern nachdem er seinen Wasserstoffvorrat aufgebraucht hat, wenn seine Masse größer ist als die Chandrasekhar-Masse?

(1 Punkt)