Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 1** **18.10.2012**

Aufgabe 1 *Orthogonale krummlinige Koordinaten*

Ein Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ mit den kartesischen Koordinaten x, y und z kann ebenso durch die krummlinigen Koordinaten q_1, q_2 und q_3 beschrieben werden. Die zugehörigen Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad \text{mit} \quad h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| \quad (i = 1, 2, 3).$$

Erfüllen die Einheitsvektoren die Beziehung $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ spricht man von orthogonalen Koordinaten. Wir legen die Reihenfolge der $\vec{e}_i$ so fest, dass sie ein Rechtssystem bilden, d.h. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k$, wobei (ijk) zykl. $(1, 2, 3)$.

a) Zeigen Sie, dass der Gradient einer skalaren Funktion $\phi(q_1, q_2, q_3)$ in der Form

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial q_i}\vec{e}_i$$

geschrieben werden kann. *(1 Punkt)*

b) Beweisen Sie

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right]$$

(1 Punkt)

c) Beweisen Sie

$$\text{rot}\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_j h_k}\left[\frac{\partial(A_k h_k)}{\partial q_j} - \frac{\partial(A_j h_j)}{\partial q_k}\right]\vec{e}_i \quad \text{mit } (ijk) \text{ zykl. } (1, 2, 3)$$

(1 Punkt)

Hinweis: Für b) und c) ist es hilfreich, zunächst $\vec{\nabla} q_i = \vec{e}_i / h_i$ zu zeigen.

d) Berechnen Sie explizite Ausdrücke für $\vec{e}_i$, grad, div und rot in Zylinderkoordinaten.

(1 Punkt)

Aufgabe 2 *Integrale über Felder*

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) Kurvenintegral: $\int_C x^2 y^2 + z^2 \, ds$

Der Integrationsweg C ist eine Umdrehung (positive Drehrichtung) einer Schraubenlinie um die z-Achse mit Ganghöhe und Radius 1, die bei $\vec{x} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ startet. *(1 Punkt)*

b) Oberflächenintegral: $\int_P \vec{v} \, d^2\vec{x}$ mit

$$P: \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ 1 - u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v < 2\pi \end{matrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt)

c) Volumenintegral: $\int_V d^3x \, \vec{v}$ mit $\vec{v}(\vec{x}) = (1 + y, x, 0)^{\mathrm{T}} / \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2}$ über ein Volumen V der Höhe 1 mit ellipsenförmigem Querschnitt, dessen große und kleine Halbachse $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ entlang der x- bzw. y-Achse liegen. Verwenden Sie zur Abwechslung einmal elliptische Koordinaten: $x = \cosh u \cos v$, $y = \sinh u \sin v$ und z.

(1 Punkt)

Aufgabe 3 *Beispiele für Vektorfelder*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 25.10.2012.

Gegeben sind die Vektorfelder

$$\vec{v}_1(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (|\vec{x}| > 0), \qquad \vec{v}_2(\vec{x}) = \vec{e}_z \times \vec{x},$$

$$\vec{v}_3(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_z \times \vec{x}}{|\vec{x}|^2 - (\vec{e}_z \cdot \vec{x})^2} \quad (x^2 + y^2 > 0), \qquad \vec{v}_4(\vec{x}) = \vec{e}_z[R^2 - x^2 - y^2] \quad (x^2 + y^2 \le R^2).$$

a) Skizzieren Sie die Felder. Welchen physikalischen Größen könnten sie entsprechen?

b) Berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i$, die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{v}_i$, und die transponierte Jacobi-Matrix $[\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_i]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

c) Berechnen Sie explizit den Fluss (Kugel am Ursprung mit Radius 1) und die Zirkulation (Kreis in der x-y-Ebene mit Radius 1 und Mittelpunkt am Ursprung) der Vektorfelder.