Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 2** **25.10.2012**

Aufgabe 4 *Levi-Civita Tensor*

Der Levi-Civita vollständig antisymmetrische Tensor ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ durch zyklische Vertauschung aus } (1,2,3) \text{ hervorgeht} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ durch zyklische Vertauschung aus } (2,1,3) \text{ hervorgeht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit kann das Kreuzprodukt $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$ komponentenweise geschrieben werden. Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ-Tensors

a) $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ *(1 Punkt)*

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ *(1 Punkt)*

c) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 5 *Delta-Funktion*

In der Vorlesung wurde die Delta-Funktion $\delta(x)$ eingeführt. Sie hat die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0).$$

a) Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge

$$d_\ell(x) = \begin{cases} 1/\ell & -\ell/2 \le x \le \ell/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $\ell \to 0$ formal gegen die Delta-Funktion konvergiert. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x-x_0) f(x) = -f'(x_0)$. *(1 Punkt)*

c) Die Funktion $f(x)$ habe nur einfache Nullstellen bei x_i. Beweisen Sie, dass in diesem Fall

$$\delta(f(x)) = \sum_i |f'(x_i)|^{-1} \delta(x - x_i)$$

gilt. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie: $\delta(x-x_0) = \Theta'(x-x_0)$ mit der Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(1 Punkt)

e) In drei Raumdimensionen und kartesischen Koordinaten ist

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0).$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Delta-Funktion in Kugel- und Zylinderkoordinaten. *(1 Punkt)*

Aufgabe 6 *Kugelsymmetrische Ladungsverteilung*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 02.11.2012.

Für das Potential einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(r)$ gilt:

$$\Phi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \qquad (1)$$

a) Verwenden Sie $\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$, um Gl. (1) herzuleiten.

b) Wiederholen Sie die Herleitung von Gl. (1) mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes. Verwenden Sie die integrale Form, und nutzen Sie die Symmetrie der Ladungsverteilung.

c) Für ein Wasserstoffatom im elektronischen Grundzustand kann die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = e\left(\delta(\vec{x}) - |\psi(\vec{x})|^2\right)$$

mit $\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp[-|\vec{x}|/a_0]$ angenommen werden. Wenden Sie Gl. (1) an, um das elektrische Potential zu berechnen. Was erhält man für $r \ll a_0$ und $r \gg a_0$? Interpretieren Sie diese Grenzfälle physikalisch.

d) Was ergibt sich für eine homogene Ladungsverteilung innerhalb einer Kugel mit Radius R? Skizzieren Sie das Potential und vergleichen Sie es mit dem Potential einer Punktladung gleicher Größe.