Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 3** **31.10.2012**

Aufgabe 7 *Feldlinien*

Feldlinien sind Kurven $\vec{f}(t)$, deren Tangentenvektoren in jedem Raumpunkt $\vec{x}$ parallel zum gegebenen Feld $\vec{v}(\vec{x})$ stehen.

a) Zeigen Sie, dass die Feldlinien durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(t) = \vec{v}(\vec{f}(t))$$

bestimmt sind. Warum überkreuzen sich Feldlinien nicht? *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Feldlinie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix},$$

welche durch den Punkt $\vec{x} = (1,0,0)^T$ geht. *(1 Punkt)*

Aufgabe 8 *Integration auf die Delta Funktion*

Mutig geworden nach den zahlreichen Übungen mit der Delta-Funktion, wollen wir nun untersuchen, was passiert, wenn wir auf die Delta-Funktion "drauf integrieren", d.h. wenn eine Integralgrenze auf der Singularität der Delta-Funktion liegt. Dazu betrachten wir die Funktionenreihen

$$d_\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{für} \quad -\ell/2 \le x \le \ell/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \tilde{d}_\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{für} \quad 0 \le x \le \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass auch $\tilde{d}_\ell(x)$ zur Delta-Funktion konvergiert. Integrieren Sie dazu die Funktionenreihe $\tilde{d}_\ell(x)$, multipliziert mit einer Testfunktion $f(x)$ im Intervall $[-\infty,\infty]$ und bilden Sie danach den Grenzwert $\ell \to 0$. Wiederholen Sie nun die Rechnung mit *beiden* Funktionenreihen, diesmal aber für die Integrationsintervalle $[-\infty,0]$ und $[0,\infty]$. Was schließen Sie aus Ihren Ergebnissen, insbesondere für die δ-Funktion in Zylinder- und Kugelkoordinaten? *(1 Punkt)*

Aufgabe 9 *Idealer Leiter*

Überlegen Sie sich, warum das elektrische Feld innerhalb eines idealen Leiters verschwindet. Zeigen Sie damit, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Leiteroberfläche steht und eine Unstetigkeit beim Übergang vom Inneren des Leiters zum Außenraum aufweist, welche proportional zur Oberflächenladungsdichte an der Grenzfläche ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Gaußschen und Stokesschen Satz und wählen Sie ein passendes Volumen bzw. eine passende Fläche, welche sich über die Grenzfläche zwischen Leiter und Außenraum erstrecken.

(1 Punkt)

Aufgabe 10 *Singularität von Vektorfeldern*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 08.11.2012.

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{-1}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}\begin{pmatrix} y+x \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\vec{x} = (x,y,z)$.

a) Veranschaulichen Sie das Vektorfeld mit Hilfe einer Skizze und diskutieren Sie dessen Eigenschaften für verschiedene Werte von n.

b) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes.

c) Bestimmen Sie die Zirkulation $\oint d\vec{s}\,\vec{v}$ entlang eines Kreises in der x-y-Ebene mit Radius R und Mittelpunkt am Ursprung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Integral $\int d\vec{a}\,\mathrm{rot}\vec{v}$ über die Fläche des Kreises.

d) Betrachten Sie den Fall $n = 2$. Berechnen Sie $\oint d\vec{s}\,\vec{v}(\vec{x})$ entlang des kreisförmigen Pfades

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t + y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

um den Punkt $(0, y_0, z_0)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe c).

Hinweis:

$$\int_0^{2\pi} dt \frac{1}{(r+\cos t)^2 + \sin^2 t} = \frac{2\pi}{|r^2-1|}, \quad \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi} dt \frac{\cos t}{(r+\cos t)^2 + \sin^2 t} = 1 - \frac{r^2+1}{|r^2-1|},$$

$$\int_0^{2\pi} dt \frac{\sin t}{(r+\cos t)^2 + \sin^2 t} = 0$$

e) Für welche Werte von n stimmen das Oberflächenintegral $\int d\vec{a}\,\vec{v}$ und das Volumenintegral $\int dV\,\mathrm{div}\vec{v}$ überein, wenn als Integrationsbereiche die Oberfläche bzw. das Volumen eines entlang der z-Achse orientierten Zylinders mit Länge L und Radius R angenommen wird?