Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 4** **8.11.2012**

Aufgabe 11 *Elektrisches Feld einer geladenen Platte*

Gegeben ist eine dünne, homogen geladene, quadratische Platte mit Seitenlänge a und Gesamtladung Q.

a) Geben Sie die Ladungsdichte mit Hilfe der Delta-Funktion und der Heaviside-Funktion an. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie das elektrische Potential in der Höhe z über dem Mittelpunkt der Platte. Welche Arbeit wird geleistet, wenn eine Ladung q von außerhalb ($z = \infty$) nach $z = a/2$ transportiert wird?

Hinweis:

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{A^2+x^2}\right)$$

$$\int_{-A}^{A} \ln\frac{\sqrt{x^2+1}+A}{\sqrt{x^2+1}-A}\,dx = 8A\sinh^{-1}A - 4\sqrt{1-A^2}\tan^{-1}\frac{A^2}{\sqrt{1-A^4}}$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld in der Höhe z über dem Mittelpunkt der Platte in der Form

$$\vec{E}(z) = 4\vec{e}_z\frac{Q}{a^2}\tan^{-1}\frac{a^2/4}{z\sqrt{z^2+a^2/2}}$$

geschrieben werden kann. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(z)$ für $a \to \infty$, falls die Flächenladungsdichte σ konstant gehalten wird. Berechnen Sie außerdem $\vec{E}(z)$ für $a \ll z$. Wie interpretieren Sie die Ergebnisse? *(1 Punkt)*

Aufgabe 12 *Symmetrie der Greenschen Funktion*

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Greenschen Funktion:

a) Die Greensche Funktion, die Dirichletrandbedingungen erfüllt, ist symmetrisch in ihren Argumenten, d.h.

$$G_\mathrm{D}(\vec{x},\vec{x}') = G_\mathrm{D}(\vec{x}',\vec{x}).$$

(1 Punkt)

b) Die von-Neumann Greensche Funktion kann symmetrisiert werden durch

$$G_\mathrm{N}^\mathrm{sym}(\vec{x},\vec{x}') = G_\mathrm{N}(\vec{x},\vec{x}') - \frac{1}{S}\oint_S G_\mathrm{N}(\vec{x},\vec{y})d^2y,$$

wobei S die Randfläche ist, auf der die von-Neumann Bedingung gegeben ist. *(2 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie den Greenschen Satz.

Aufgabe 13 *Elektrostatik mit endlicher Photonenmasse*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 15.11.2012.

Überlegen Sie, wie sich die Gesetze der Elektrostatik ändern würden, wenn neue Messungen eine korrigierte Form der Coulombkraft

$$\vec{F} = q_1q_2\frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}\left(1+\frac{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}{\Lambda}\right)\exp\left[-\frac{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}{\Lambda}\right] \tag{1}$$

ergäben. Hierbei wäre Λ eine neue Naturkonstante. Für $\Lambda \to \infty$ geht das neue Kraftgesetz in die bekannte Coulombkraft über. Das Superpositionsprinzip soll unverändert gelten.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, wenn Gleichung (1) als Kraftgesetz gültig wäre.

b) Zeigen Sie, dass für dieses elektrische Feld ein skalares Potential existiert (rotationsfrei?). Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{x})$ einer Punktladung (das sog. Yukawa-Potential).

c) Begründen Sie das Analogon zum Gaußschen Gesetz,

$$\oint_{\partial V}\vec{E}(\vec{x})\cdot d^2\vec{x} + \frac{1}{\Lambda^2}\int_V \Phi(\vec{x})\,d^3x = 4\pi Q_\mathrm{in},$$

der „neuen“ Elektrostatik, wobei Q_in die im Volumen eingeschlossene Ladung ist.

Anleitung: Berechnen Sie zunächst die beiden Integrale für ein Kugelvolumen, in dessen Zentrum sich eine Punktladung befindet. Betrachten Sie dann die Änderung beider Integrale, wenn das kugelförmige Volumen eine Ausstülpung hat, die durch eine Vergrößerung des Kugelradius über einem kleinen Raumwinkel $d\Omega$ entsteht. Argumentieren Sie dann, warum das Gesetz für ein beliebiges Volumen und beliebige Ladungsverteilungen gilt.

d) Berechnen Sie die modifizierte Form der Poissongleichung.