Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 5** **15.11.2012**

Aufgabe 14 *Elektrostatische Kraft einer geladenen Kugel*

Das Potential einer Kugel mit Radius R und homogen verteilter Ladung Q ist

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{R} + \frac{1}{2}\frac{Q}{R}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] & \text{für} \quad r \leq R \\ \frac{Q}{r} & \text{für} \quad r > R \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Kraft auf die Nordhalbkugel. *(1 Punkt)*

Aufgabe 15 *Selbstenergie*

Betrachten Sie eine Kugel mit homogener Ladungsdichte und berechnen Sie die elektrostatische Energie der Ladungsverteilung. Was passiert, wenn der Radius der Kugel bei gleichbleibender Gesamtladung gegen Null geht? Was bedeutet das z.B. für ein Elektron? Wenn das Elektron mit Ruheenergie $m_e c^2$ eine homogen geladene Kugel wäre, wie groß wäre sein Radius? *(1 Punkt)*

Aufgabe 16 *Fourier Transformation*

Die Fouriertransformation einer Funktion $f(x)$ und die inverse Fouriertransformation sind definiert als

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk.$$

Die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ ist die spektrale Zerlegung von $f(x)$, d.h. sie gibt an mit welcher "Gewichtung" die harmonische Funktion e^{ikx} in $f(x)$ vorkommt.

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}$ eine Darstellung der δ-Funktion ist. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \cos(k_0 x)$. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte einer Gaußfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$. *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie $\tilde{f}(k) = \tilde{g}(k)\tilde{h}(k)$, wenn $f(x)$ durch die Faltung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)h(y)dy$ gegeben ist. *(1 Punkt)*

f) Wie lautet die Fouriertransformierte von $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$? *(1 Punkt)*

g) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

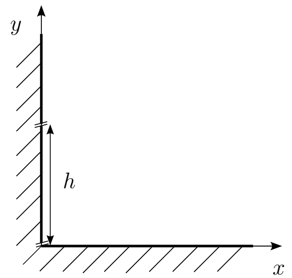
$$\frac{d}{dx} f(x) + \kappa f(x) = \varphi(x)$$

mit Hilfe der Fouriertransformation. Wenn Sie die Differentialgleichung transformieren erhalten Sie eine algebraische Gleichung. Lösen Sie diese und transformieren Sie das Ergebnis anschließend zurück. Denken Sie dabei an die Produktregel der Faltung. *(2 Punkte)*

Aufgabe 17 *Greensche Funktion mit Dirichlet Randbedingungen*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 22.11.2012.

Wir betrachten einen unendlich ausgedehnten L-förmigen Leiter, dessen Kante entlang der z-Achse liegt. Die Oberfläche des Leiters bestehe aus der halben x-z- und der halben y-z-Ebene, sodass für den Raum außerhalb des Leiters $x > 0$ und $y > 0$ gilt, siehe Abbildung.



a) An der Stelle $\vec{x}_0$ im Außenraum befindet sich eine Punktladung q. Bestimmen Sie mit Hilfe von Spiegelladungen das Potential $\phi(\vec{x})$ für den Außenraum, so dass $\phi = 0$ auf der Oberfläche des Leiters gilt. Ermitteln Sie aus Ihrem Ergebnis die Greensche Funktion $G_D(x, x')$ für Dirichlet-Randbedingungen.

b) Bis zur Höhe h ist der untere Teil der senkrechten Platte nun isoliert vom restlichen geerdeten Leiter. Der isolierte Abschnitt wird auf konstantes Potential ϕ_1 gebracht. Außerdem ist der Außenraum nun ladungsfrei. Berechnen Sie mit Hilfe der formalen Lösung der Laplace Gleichung und der Greenschen Funktion das Potential außerhalb des Leiters.
Ergebnis:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\phi_1}{\pi} \left(2\tan^{-1}\frac{y}{x} - \tan^{-1}\frac{y+h}{x} - \tan^{-1}\frac{y-h}{x} \right).$$

Was ergibt sich für $h \to \infty$?

c) Im Außenraum befindet sich zusätzlich eine linienförmige, parallel zur y-Achse angeordnete Ladungsverteilung der Länge ℓ mit Mittelpunkt $\vec{x}_M$ und homogener Ladungsdichte Q/ℓ. Der Leiter befindet sich weiterhin auf unterschiedlichen Potentialen wie in Teilaufgabe b). Berechnen Sie für diese Konfiguration das Potential $\phi(\vec{x})$ außerhalb des Leiters. Falls Ihnen die entsprechende Software zur Verfügung steht, plotten Sie das Gesamtpotential.